



Pflichtteil	2
Wahlteil - Aufgabe W1a	10
Wahlteil - Aufgabe W1b	12
Wahlteil - Aufgabe W2a	14
Wahlteil - Aufgabe W2b	16
Wahlteil - Aufgabe W3a	19
Wahlteil - Aufgabe W3b	21
Wahlteil - Aufgabe W4a	24
Wahlteil - Aufgabe W4b	26

Wichtige Hinweise zum Copyright:

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und nur für die eigene Nutzung zugelassen. Kopieren und Vervielfältigen der vorliegenden Datei ist verboten! Jede Nutzung in anderen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags.

Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung vervielfältigt oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Ausgenommen von diesen Regelungen ist die **Verwendung für folgende Unterrichtszwecke:**

So dürfen Lehrkräfte die vorliegende Datei zu Unterrichtszwecken ausdrucken, mit elektronischen Projektionsverfahren (wie Laptop und Beamer) einsetzen und OHP-Folien erstellen. Verboten ist allerdings die Weitergabe der Datei auf elektronischen Datenträgern.

Verstöße werden strafrechtlich verfolgt!

© Mathematik-Verlag 2026, Mosbach

Mathematik-Verlag Rainer Hild
Steige 44-2
74821 Mosbach
Internet: <https://matheverlag.com>
E-Mail: info@matheverlag.com

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich



Aufgabe P1:

Lösungsübersicht:

• Für die Länge $\overline{CD}$ gilt: $\overline{CD} = \overline{CE} - \overline{DE}$. Die Länge $\overline{CE}$ kann im Dreieck EBC mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1). Die Länge $\overline{DE}$ kann im Dreieck AED mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

• Der Flächeninhalt des Dreiecks ADC ist die Differenz der Flächeninhalte der Dreiecke AEC und AED. Zur Berechnung der Flächeninhalte A_{AEC} und A_{AED} benötigt man die Längen der Katheten der Dreiecke AEC und AED, die mit der Kosinus- bzw. Sinusfunktion berechnet werden können (siehe Figur 1 und 2).

Tipp: Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst alle Seitenlängen der Dreiecke EBC und AED berechnen.

Berechnung der Länge $\overline{CD}$:

Es gilt: $\overline{CD} = \overline{CE} - \overline{DE}$.

→ Berechnung der Länge $\overline{CE}$:

Für $\overline{CE}$ gilt im Dreieck EBC (siehe Figur 1):

$$\sin 55^\circ = \frac{\overline{CE}}{9,0} \quad | \cdot 9,0$$

$$\Leftrightarrow 7,37 = \overline{CE} \text{ bzw. } \overline{CE} = 7,37 \text{ cm}$$

→ Berechnung der Länge $\overline{DE}$:

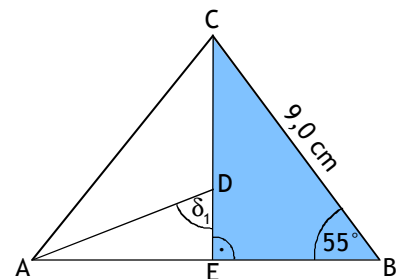
Für $\overline{DE}$ gilt im Dreieck AED (siehe Figur 2):

$$\cos 69,4^\circ = \frac{\overline{DE}}{7,3} \quad | \cdot 7,3$$

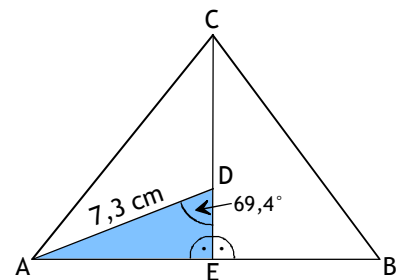
$$\Leftrightarrow 2,57 = \overline{DE} \text{ bzw. } \overline{DE} = 2,57 \text{ cm}$$

Für $\overline{CD} = \overline{CE} - \overline{DE}$ folgt damit: $\overline{CD} = 7,37 \text{ cm} - 2,57 \text{ cm} = 4,8 \text{ cm}$

Ergebnis: Die Länge $\overline{CD}$ beträgt $\overline{CD} = 4,8 \text{ cm}$.



Figur 1



Figur 2

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ADC:

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ADC gilt: $A_{ADC} = A_{AEC} - A_{AED}$

→ Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks AEC:

Es gilt: $A_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{CE}$ (siehe Formelsammlung). Die Länge $\overline{CE} = 7,37 \text{ cm}$ wurde bereits oben berechnet. Die Länge $\overline{AE}$ kann im Dreieck AED mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt: $\sin 69,4^\circ = \frac{\overline{AE}}{7,3} \quad | \cdot 7,3$

$$\Leftrightarrow 6,83 = \overline{AE} \text{ bzw. } \overline{AE} = 6,83 \text{ cm}$$

$$\text{Damit erhält man: } A_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot 6,83 \cdot 7,37 = \underline{25,17 \text{ cm}^2}$$

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich



→ Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks AED:

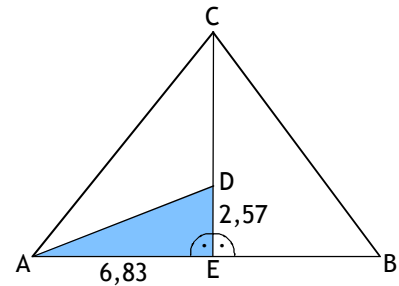
Es gilt: $A_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{DE}$ (siehe Formelsammlung)

Die beiden Längen $\overline{AE} = 6,83 \text{ cm}$ und $\overline{DE} = 2,57 \text{ cm}$ wurden bereits oben berechnet. Damit erhält man:

$$A_{AED} = \frac{1}{2} \cdot 6,83 \cdot 2,57 = \underline{8,78 \text{ cm}^2}$$

Damit folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks ADC:

$$A_{ADC} = 25,17 \text{ cm}^2 - 8,78 \text{ cm}^2 = \underline{16,39 \text{ cm}^2}$$



Figur 3

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Dreiecks ADC beträgt $A_{ADC} = \underline{16,39 \text{ cm}^2}$.

Aufgabe P2:

Lösungsübersicht:

Für den Umfang des Dreiecks ACD gilt: $u = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{AD}$. Da nicht so leicht zu erkennen ist, wie man aus den angegebenen Längen diese drei Strecken berechnen kann, sollte man zunächst mit $\overline{AE} = 3,1 \text{ cm}$ und $\overline{BE} = 8,4 \text{ cm}$ im Dreieck ABE die Länge $\overline{AB}$ und den Winkel β berechnen (siehe Figur 1). Anschließend muss man beachten, dass die Strecke $\overline{BE}$ die Strecke $\overline{AC}$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC halbiert.

- Dann kann man die Strecke $\overline{AC}$ mit $\overline{AC} = 2 \overline{AM}$ berechnen. Die Länge $\overline{AM}$ erhält man im Dreieck ABM mit der Sinusfunktion (siehe Figur 2).
- Die Längen $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ kann man im Dreieck ACD mit der Strecke $\overline{AC}$ und der Sinus- bzw. Kosinusfunktion berechnen, wenn man den Winkel α_1 kennt (siehe Figur 3 und 4). Weil das Trapez ABCD rechtwinklig ist, gilt: $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha_2$ (siehe Figur 3). Den Winkel α_2 erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABM.

Für den Umfang des Dreiecks ACD gilt: $u = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{AD}$

Berechnung der Länge $\overline{AC}$:

Zunächst sollte man im Dreieck ABE mit den angegebenen Längen $\overline{AE} = 3,1 \text{ cm}$ und $\overline{BE} = 8,4 \text{ cm}$ die Länge $\overline{AB}$ und den Winkel β berechnen (siehe Figur 1).

- Mit dem Satz des Pythagoras erhält man für die Länge $\overline{AB}$:

$$3,1^2 + \overline{AB}^2 = 8,4^2 \quad | -3,1^2$$

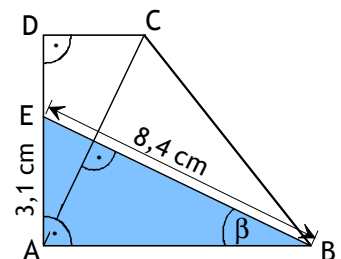
$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 8,4^2 - 3,1^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 60,95 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \underline{7,81 \text{ cm}}$$

- Für den Winkel β gilt (siehe Figur 1): $\sin \beta = \frac{3,1}{8,4} \quad | \sin^{-1}$

$$\Leftrightarrow \underline{\beta = 21,66^\circ}$$



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich



Weil nun das Dreieck ABC laut Aufgabenstellung gleichschenkelig ist, wird seine Basis $\overline{AC}$ von der Strecke $\overline{BE}$ halbiert. Die Länge $\overline{AM}$ kann im Dreieck ABM mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt:

$$\sin 21,66^\circ = \frac{\overline{AM}}{7,81} \quad | \cdot 7,81$$

$$\Leftrightarrow 2,88 = \overline{AM} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AM} = 2,88 \text{ cm}$$

Mit $\overline{AC} = 2 \overline{AM}$ erhält man: $\overline{AC} = 5,76 \text{ cm}$

Berechnung der Längen $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$:

Die Längen $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ können nun im Dreieck ACD mit $\overline{AC} = 5,76 \text{ cm}$ und der Sinus- bzw. Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel α_1 kennt (siehe Figur 3).

→ Berechnung des Winkels α_1 :

Weil das rechtwinklige Trapez ABCD bei der Ecke A einen rechten Winkel hat, gilt: $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha_2$

Den Winkel α_2 erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABM. Darin gilt:

$$21,66^\circ + 90^\circ + \alpha_2 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 111,66^\circ + \alpha_2 = 180^\circ \quad | -111,66^\circ$$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 = 68,34^\circ$$

Für α_1 folgt damit: $\alpha_1 = 90^\circ - 68,34^\circ = 21,66^\circ$

Mit $\alpha_1 = 21,66^\circ$ gilt nun im Dreieck ACD (siehe Figur 4):

$$\sin 21,66^\circ = \frac{\overline{CD}}{5,76} \quad | \cdot 5,76$$

$$\Leftrightarrow 2,13 = \overline{CD} \quad \text{bzw.} \quad \overline{CD} = 2,13 \text{ cm}$$

Außerdem gilt:

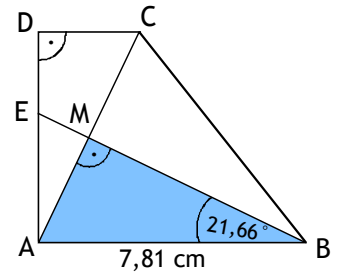
$$\cos 21,66^\circ = \frac{\overline{AD}}{5,76} \quad | \cdot 5,76$$

$$\Leftrightarrow 5,35 = \overline{AD} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AD} = 5,35 \text{ cm}$$

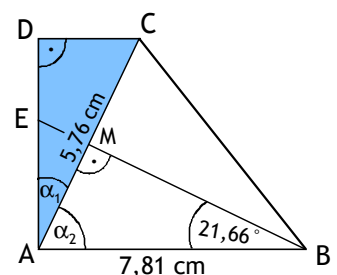
Mit $\overline{AC} = 5,76 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 2,13 \text{ cm}$ und $\overline{AD} = 5,35 \text{ cm}$ erhält man schließlich für den Umfang des Dreiecks ACD :

$$u = 5,76 \text{ cm} + 2,13 \text{ cm} + 5,35 \text{ cm} = 13,24 \text{ cm}$$

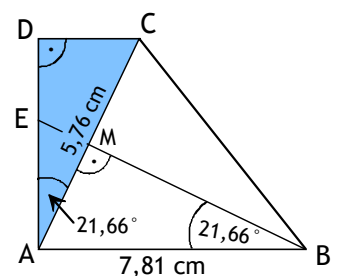
Ergebnis: Der Umfang der Dreiecks ACD beträgt $u = 13,24 \text{ cm}$.



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich



Aufgabe P3:

Lösungsübersicht:

Zur Berechnung des Zylindervolumens V_{Zyl} und des Kegelvolumens V_{Ke} benötigt man den Radius r der beiden Grundflächen, die Zylinderhöhe h_{Zyl} und die Kegelhöhe h_{Ke} . Diese drei Größen können berechnet werden, wenn man die angegebenen Größen in die Mantelformeln von Zylinder und Kegel und in den Satz des Pythagoras für das rechtwinklige „Kegeldreieck“ einsetzt (siehe Figur 1).

Berechnung des Zylindervolumens V_{Zyl} und des Kegelvolumens V_{Ke} :

Es gilt (siehe Formelsammlung): $V_{\text{Zyl}} = \pi r^2 \cdot h_{\text{Zyl}}$ und $V_{\text{Ke}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h_{\text{Ke}}$

Den Radius r , die Zylinderhöhe h_{Zyl} und die Kegelhöhe h_{Ke} kann man berechnen, indem man die angegebenen Größen $M_{\text{Zyl}} = M_{\text{Ke}} = 340 \text{ cm}^2$ und $s = 18,0 \text{ cm}$ in die folgenden Formeln einsetzt:

$$(I) \quad M_{\text{Zyl}} = 2\pi \cdot r \cdot h_{\text{Zyl}}$$

$$(II) \quad M_{\text{Ke}} = \pi \cdot r \cdot s$$

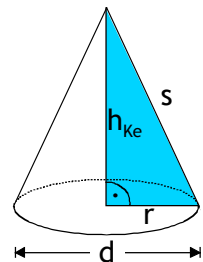
$$(III) \quad h_{\text{Ke}}^2 + r^2 = s^2 \quad (\text{siehe Figur 1, Satz des Pythagoras})$$

Einsetzen von $M_{\text{Zyl}} = M_{\text{Ke}} = 340 \text{ cm}^2$ und $s = 18,0 \text{ cm}$ ergibt:

$$(Ia) \quad 340 = 2\pi \cdot r \cdot h_{\text{Zyl}}$$

$$(IIa) \quad 340 = \pi \cdot r \cdot 18$$

$$(IIIa) \quad h_{\text{Ke}}^2 + r^2 = 18^2$$



Figur 1

→ Berechnung des Radius' r :

Aus Formel (IIa) kann nun der Radius r berechnet werden:

$$340 = \pi \cdot r \cdot 18 \quad | : (18\pi)$$

$$\Leftrightarrow 6,01 = r \quad \text{bzw.} \quad \underline{r = 6,01 \text{ cm}}$$

→ Berechnung der Zylinderhöhe h_{Zyl} :

Einsetzen von $r = 6,01 \text{ cm}$ in die Formel (Ia) ergibt:

$$340 = 2\pi \cdot 6,01 \cdot h_{\text{Zyl}}$$

$$\Leftrightarrow 340 = 12,02\pi \cdot h_{\text{Zyl}} \quad | : (12,02\pi)$$

$$\Leftrightarrow 9,00 = h_{\text{Zyl}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{h_{\text{Zyl}} = 9,00 \text{ cm}}$$

→ Berechnung der Kegelhöhe h_{Ke} :

Einsetzen von $r = 6,01 \text{ cm}$ in die Formel (IIIa) ergibt:

$$h_{\text{Ke}}^2 + 36,12 = 324 \quad | -36,12$$

$$\Leftrightarrow h_{\text{Ke}}^2 = 287,88 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Rightarrow \underline{h_{\text{Ke}} = 16,97 \text{ cm}}$$

Mit $r = 6,01 \text{ cm}$ und $h_{\text{Zyl}} = 9,00 \text{ cm}$ erhält man: $V_{\text{Zyl}} = 1021,27 \text{ cm}^3$

Mit $r = 6,01 \text{ cm}$ und $h_{\text{Ke}} = 16,97 \text{ cm}$ erhält man: $V_{\text{Ke}} = 641,89 \text{ cm}^3$. Damit ist: $V_{\text{Zyl}} - V_{\text{Ke}} = 379,38 \text{ cm}^3$

Ergebnis: Die Differenz der beiden Rauminhalte beträgt $379,38 \text{ cm}^3$.

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich



Aufgabe P4:

Vervollständigter Boxplot zur Preisliste der Frauenschuhe:

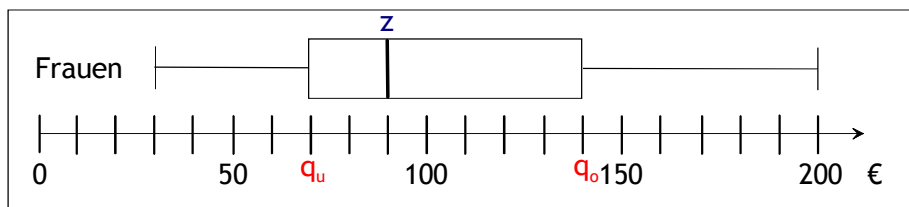
Um den Boxplot vervollständigen zu können, muss man noch den Zentralwert, das untere Quartil und das obere Quartil berechnen. Mit $n = 17$ und der Rangliste

30 ; 30 ; 50 ; 60 ; **70** ; 70 ; 80 ; 90 ; **90** ; 100 ; 120 ; 140 ; **140** ; 150 ; 160 ; 180 ; 200 erhält man:

Zentralwert: Wegen $17 \cdot \frac{1}{2} = 8,5$ muss man am 9. Platz der Rangliste nachschauen: **$z = 90$ €**

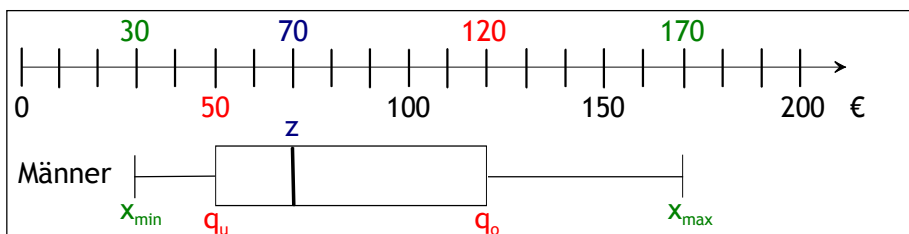
Unteres Quartil: Wegen $17 \cdot \frac{1}{4} = 4,25$ muss man am 5. Platz der Rangliste nachschauen: **$q_u = 70$ €**

Oberes Quartil: Wegen $17 \cdot \frac{3}{4} = 12,75$ muss man am 13. Platz der Rangliste nachschauen: **$q_o = 140$ €**



Passende Werte für die Rangliste der Preise der Männerschuhe:

Zunächst muss man im Boxplot die charakteristischen Werte $x_{\min}$, $x_{\max}$, z , q_u und q_o ablesen.



Man erhält: **$x_{\min} = 30$** , **$x_{\max} = 170$** , **$z = 70$** , **$q_u = 50$** und **$q_o = 120$**

Um damit die Rangliste der Preise der Männerschuhe ergänzen zu können, muss man wissen, an welchen Rängen das untere Quartil q_u , der Zentralwert z und das obere Quartil q_o stehen. Mit $n = 13$ erhält man:

Zentralwert z : $13 \cdot \frac{1}{2} = 6,5$. Also muss **$z = 70$** am 7. Platz der Rangliste stehen.

Unteres Quartil q_u : $13 \cdot \frac{1}{4} = 3,25$. Also muss **$q_u = 50$** am 4. Platz der Rangliste stehen.

Oberes Quartil q_o : $13 \cdot \frac{3}{4} = 9,75$. Also muss **$q_o = 120$** am 10. Platz der Rangliste stehen.

Ergebnis:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Preis	30	30		50	50	60	70			120	120	140	170

Für den **Rang 3** passen alle Werte von **30 € bis 50 €**.

Für die **Ränge 8 und 9** kommen Werte von **70 € bis 120 €** in Frage, wobei der Preis des 9. Rangs nicht kleiner sein darf als der Preis des 8. Rangs.

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich



Aufgabe P5:

Definitionsmenge und Lösungsmenge der Gleichung:

- Zur **Definitionsmenge** gehören alle $x \in \mathbb{R}$ außer diejenigen x -Werte, für die ein oder mehrere Nenner der Bruchgleichung 0 werden. Man muss also prüfen, für welche x -Werte die einzelnen Nenner 0 werden:

Der erste Nenner „ x “ wird 0 für $x = 0$. Der dritte Nenner „ $x - 3$ “ wird 0 für $x = 3$.

Um zu erkennen, wann der zweite Nenner $x^2 - 3x = 0$ wird, sollte man ihn als Produkt schreiben: $x^2 - 3x = x \cdot (x - 3)$. Da ein Produkt immer dann 0 wird, wenn einer der Faktoren 0 wird, wird der zweite Nenner 0 für $x = 0$ und $x = 3$.

Es müssen also die Werte $x = 0$ und $x = 3$ aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.

Ergebnis: Die Definitionsmenge der Gleichung ist $\underline{ID = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}}$.

- Zur Berechnung der **Lösungsmenge** muss man die Gleichung $\frac{x+3}{x} = \frac{9}{x^2-3x} - \frac{3}{x-3}$ zuerst nennerfrei machen. Welches der Hauptnenner (HN) ist, erkennt man, indem man den zweiten Nenner durch Ausklammern von „ x “ als Produkt schreibt: $\frac{x+3}{x} = \frac{9}{x \cdot (x-3)} - \frac{3}{x-3}$

Der Hauptnenner ist also „ $x \cdot (x - 3)$ “. Durch Erweitern aller Brüche auf den Hauptnenner $HN = x \cdot (x - 3)$

erhält man: $\frac{(x+3) \cdot (x-3)}{x \cdot (x-3)} = \frac{9}{x \cdot (x-3)} - \frac{3 \cdot x}{(x-3) \cdot x} \quad | \cdot x(x-3) \quad | \text{ Alle Nenner fallen weg.}$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 9 - 3x \quad | \text{ dritte binomische Formel für den linken Term}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 9 - 3x \quad | -9 + 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$$

Mit der Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$$x_1 = -1,5 + \sqrt{1,5^2 + 18} = 3 \text{ und } x_2 = -1,5 - \sqrt{1,5^2 + 18} = -6$$

Beachte: Da $x_1 = 3$ nicht in der Definitionsmenge ist (siehe oben), ist nur $x_2 = -6$ eine Lösung.

Ergebnis: Die Lösungsmenge der Gleichung ist $\underline{IL = \{-6\}}$.

Aufgabe P6:

Die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts zwischen der Parabel und der Geraden:

Zunächst muss die Gleichung der Geraden g aufgestellt werden. Dazu benötigt man noch den Scheitelpunkt der Parabel p , durch den die Gerade g gehen soll.

→ Bestimmen des Scheitelpunkts von p :

Mithilfe einer quadratischen Ergänzung muss die Parabelgleichung in die Scheitelform umgewandelt werden:

$$y = x^2 - 6x + 10,5$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 6x + 3^2 + 10,5 - 3^2 \quad | \text{ Anwenden der zweiten binomischen Formel}$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 3)^2 + 10,5 - 9$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 3)^2 + 1,5. \quad \text{Damit ist der Scheitelpunkt } S(3 | 1,5).$$

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich



→ Aufstellen der Gleichung von g:

Mit der Steigung $m = 2$ lautet die unvollständige Gleichung von g: $y = 2x + c$.

Den y-Achsenabschnitt c erhält man durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes der Geraden g; also des soeben bestimmten Scheitelpunkts $S(3 | 1,5)$ der Parabel p:

$$1,5 = 2 \cdot 3 + c$$

$$\Leftrightarrow 1,5 = 6 + c \quad | -6$$

$$\Leftrightarrow -4,5 = c \text{ bzw. } c = -4,5$$

Damit lautet die Gleichung von g: $y = 2x - 4,5$

Zur Berechnung des zweiten Schnittpunkts Q der Parabel p: $y = x^2 - 6x + 10,5$ und der Geraden g: $y = 2x - 4,5$ muss man beide Gleichungen gleichsetzen und die resultierende Gleichung nach x auflösen: (Hinweis: Der erste Schnittpunkt ist der Scheitelpunkt $S(3 | 1,5)$ der Parabel.)

$$x^2 - 6x + 10,5 = 2x - 4,5 \quad | -2x + 4,5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

Mit der Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man: $x_1 = 4 + \sqrt{(-4)^2 - 15} = 5$ und $x_2 = 4 - \sqrt{(-4)^2 - 15} = 3$

$x_2 = 3$ ist die x-Koordinate von $S(3 | 1,5)$. Also ist $x_1 = 5$ die x-Koordinate des zweiten Schnittpunkts Q.

Dessen y-Koordinate erhält man durch Einsetzen von $x_1 = 5$ in die Gleichung von p oder in die Gleichung von g. Einsetzen von $x_1 = 5$ in g: $y = 2x - 4,5$ ergibt: $y_1 = 2 \cdot 5 - 4,5 = 5,5 \Rightarrow Q(5 | 5,5)$.

Ergebnis: Die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts Q sind $Q(5 | 5,5)$.

Aufgabe P7:

Man beachte: Um die gesuchten Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können, muss man das *gleichzeitige* Ziehen zweier Kärtchen als *zweimaliges* Ziehen von jeweils einem Kärtchen *ohne* Zurücklegen betrachten. Das Ziehen *ohne* Zurücklegen bedeutet, dass beim „zweiten“ Zug nur noch 9 Kärtchen im Beutel sind und das „zuerst“ gezogene Kärtchen fehlt.

Die Wahrscheinlichkeit, das Wort „SCHALL“ legen zu können:

Hannah muss jeweils ein „L“ ziehen, um das Wort „SCHALL“ legen zu können.

Beim „ersten“ Zug befinden sich in dem Beutel 10 Kärtchen, wovon 6 Kärtchen mit einem „L“

beschriftet sind. Also ist die Wahrscheinlichkeit, beim „ersten“ Zug ein „L“ zu ziehen: $p_1(L) = \frac{6}{10}$.

Beim „zweiten“ Zug befinden sich in dem Beutel dann nur noch 5 Kärtchen mit „L“. Insgesamt sind auch nur noch 9 Kärtchen in dem Beutel. Also ist die Wahrscheinlichkeit, beim „zweiten“ Zug ein „L“ zu ziehen: $p_2(L) = \frac{5}{9}$.

Mit der Produktregel erhält man dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(L; L) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3} \approx 33,3 \%$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, das Wort „SCHALL“ legen zu können, beträgt $P(L; L) = \frac{1}{3} \approx \underline{\underline{33,3 \%}}$.

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich



Die Wahrscheinlichkeit, das Wort „SCHATZ“ legen zu können:

Um das Wort „SCHATZ“ legen zu können, muss Hannah sowohl ein „T“ als auch ein „Z“ erwischen. Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, gibt es dafür zwei Möglichkeiten:

Entweder zieht Hannah beim „ersten“ Zug ein „T“ und beim „zweiten“ Zug ein „Z“ oder sie erwischt beim „ersten“ Zug ein „Z“ und beim „zweiten“ Zug ein „T“.

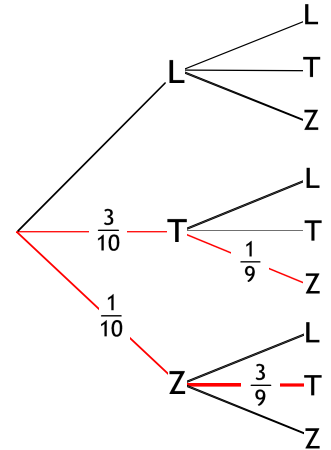
Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(T; Z)$ und $P(Z; T)$ sollte man sich dieses zweimalige Ziehen ohne Zurücklegen in einem Baumdiagramm veranschaulichen. (Im Baumdiagramm rechts sind nur diejenigen Pfade mit Wahrscheinlichkeiten beschriftet, die für das Wort „SCHATZ“ von Bedeutung sind.)

Mit der Produktregel erhält man:

$$P(T; Z) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{90} \quad \text{und} \quad P(Z; T) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{90}.$$

Mit der Summenregel folgt dann:

$$P(\text{SCHATZ}) = P(T; Z) + P(Z; T) = \frac{3}{90} + \frac{3}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} \approx 6,7 \, \%.$$



Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, das Wort „SCHATZ“ legen zu können, beträgt $\frac{6}{90} = \frac{1}{15} \approx 6,7 \, \%$.

Aufgabe P8:

Prozentualer Rückgang der Bevölkerung in Europa im Zeitraum von 2014 bis 2050:

Im Jahr 2014 gab es in Europa 741 Mio. Menschen. Das ist der Grundwert G .

Im Jahr 2050 sind es voraussichtlich nur noch 726 Mio. Menschen. Das ist der verringerte Grundwert G_- .

Einsetzen von $G = 741$ Mio. und $G_- = 726$ Mio. in die Formel $G_- = G \cdot q_-$ ergibt:

$$726 = 741 \cdot q_- \quad | : 741$$

$$\Leftrightarrow 0,98 = q_- \quad \text{bzw.} \quad q_- = 0,98$$

$$\text{Mit } q_- = 1 - \frac{p}{100} \text{ folgt: } p \, \% = 2,0 \, \%$$

Ergebnis:

Die Bevölkerungszahl von Europa wird im Zeitraum von 2014 bis 2050 voraussichtlich um **2,0 %** sinken.

Die zu erwartende Bevölkerungszahl von Afrika im Jahr 2017:

Im Jahr 2014 gab es in Afrika 1136 Mio. Menschen (= Grundwert G). Die jährliche Zuwachsrate von 2,5 % entspricht dem Erhöhungsfaktor $q_+ = 1,025$ (wegen $q_+ = 1 + \frac{p}{100}$). Die Anzahl der Jahre ist $n = 3$.

Mit der Formel $G_+ = G \cdot q_+^n$ erhält man somit: $G_+ = 1136 \cdot 1,025^3 \approx 1223$ Mio.

Ergebnis:

Die Bevölkerungszahl von Afrika wird im Jahr 2017 voraussichtlich **1223 Mio. Menschen** betragen.

Lösungen zur Prüfung 2016: Pflichtbereich



Bewerten der Aussage, wonach im Jahr 2050 jeder vierte Mensch ein Afrikaner sei:

Man muss den (prozentualen) Anteil der Afrikaner an der Weltbevölkerung im Jahr 2050 berechnen.

Die voraussichtliche Weltbevölkerung im Jahr 2050 beträgt:

$2428 + 1217 + 5252 + 60 + 726 = 9683$ Mio. Menschen. Das ist der Grundwert G .

Die Bevölkerungszahl von Afrika im Jahr 2050 beträgt 2428 Mio. Menschen. Das ist der Prozentwert W .

Einsetzen in die Formel $p\% = \frac{W}{G} \cdot 100\%$ ergibt: $p\% = \frac{2428}{9683} \cdot 100\% \approx 25,1\%$

Der in der Zeitungsmeldung erwähnte Anteil von einem Viertel entspricht einem Prozentsatz von 25 % ($= \frac{1}{4} \cdot 100\%$). Somit stimmt die Aussage der Zeitungsmeldung wegen $25,1\% \approx 25\%$.

Ergebnis: Die Aussage der Zeitungsmeldung stimmt, weil die Bevölkerungszahl von Afrika im Jahr 2050 voraussichtlich **25,1 %** ($\approx 25\%$ = ein Viertel) der Weltbevölkerung betragen wird.

Aufgabe W1a:

Lösungsübersicht:

Für den Umfang des Vierecks ABCD gilt: $u = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + 10,4 \text{ cm}$

Zur Berechnung der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ sollte man zunächst von den Eckpunkten C und D aus jeweils die Höhe des Trapezes ABCD einzeichnen. Dadurch entstehen die rechtwinkligen Dreiecke BCE und AFD, die man für die weiteren Berechnungen braucht (siehe Figur 1).

- Die Strecke $\overline{BC}$ kann man im Dreieck BCE mit der Sinusfunktion berechnen (siehe Figur 1).
- Zur Berechnung der Strecke $\overline{AB}$ muss man die Hilfslinie $\overline{AM}$ einzeichnen, die die Basis $\overline{BC}$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC halbiert (siehe Figur 2). Mit der Strecke $\overline{BM} = 0,5 \overline{BC}$ und $\beta = 70^\circ$ kann man dann im rechtwinkligen Dreieck ABM die Strecke $\overline{AB}$ berechnen (siehe Figur 2).
- Für die Strecke $\overline{CD}$ gilt: $\overline{CD} = \overline{AB} - \overline{AF} - \overline{BE}$ (siehe Figur 3). Die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ können in den Dreiecken AFD und BCE jeweils mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

Hinweis: Ohne die erwähnten Hilfslinien (Höhe des Trapezes und Strecke $\overline{AM}$) kann diese Aufgabe nicht gelöst werden.

Berechnung des Umfangs des Vierecks ABCD:

Für den Umfang des Vierecks ABCD gilt: $u = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + 10,4 \text{ cm}$

(Hinweis: Die Strecke $\overline{AD} = 10,4 \text{ cm}$ ist bereits angegeben.)

Wenn man die 9 cm lange Höhe des Trapezes ABCD jeweils von den Eckpunkten C und D einzeichnet, entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke BCE und AFD (siehe Figur 1), die man für die Berechnungen der Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ benötigt.

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W1



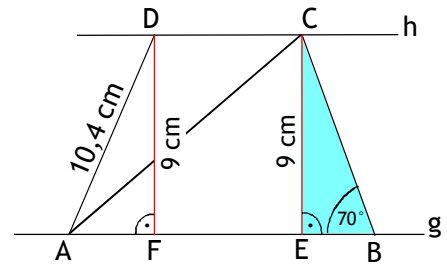
→ Berechnung der Strecke $\overline{BC}$:

Im Dreieck BCE gilt (siehe Figur 1):

$$\sin 70^\circ = \frac{9}{\overline{BC}} \quad | \cdot \overline{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} \cdot \sin 70^\circ = 9 \quad | : \sin 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 9,58 \text{ cm}$$



Figur 1

→ Berechnung der Strecke $\overline{AB}$:

Wenn man im gleichschenkligen Dreieck ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$) die Höhe $\overline{AM}$ einzeichnet, entsteht das rechtwinklige Dreieck ABM (siehe Figur 2).

Weil die Strecke $\overline{AM}$ die Basis $\overline{BC}$ halbiert, gilt:

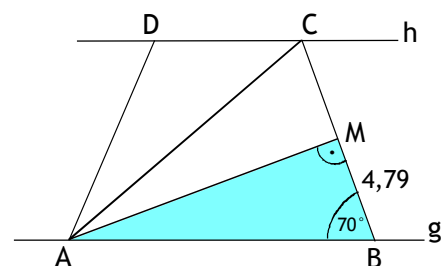
$\overline{BM} = 0,5 \overline{BC}$. Mit $\overline{BC} = 9,58 \text{ cm}$ erhält man:

$\overline{BM} = 4,79 \text{ cm}$. Im Dreieck ABM gilt somit:

$$\cos 70^\circ = \frac{4,79}{\overline{AB}} \quad | \cdot \overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \cos 70^\circ = 4,79 \quad | : \cos 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 14,01 \text{ cm}$$



Figur 2

→ Berechnung der Strecke $\overline{CD}$:

Für die Strecke $\overline{CD}$ gilt (siehe Figur 3):

$$\overline{CD} = \overline{AB} - \overline{AF} - \overline{BE} \quad \text{bzw.} \quad \overline{CD} = 14,01 - \overline{AF} - \overline{BE}$$

Die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ können in den Dreiecken AFD und BCE jeweils mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

Im Dreieck AFD gilt: $\overline{AF}^2 + 9^2 = 10,4^2$

$$\Leftrightarrow \overline{AF}^2 + 81 = 108,16 \quad | -81$$

$$\Leftrightarrow \overline{AF}^2 = 27,16 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \overline{AF} = 5,21 \text{ cm}$$

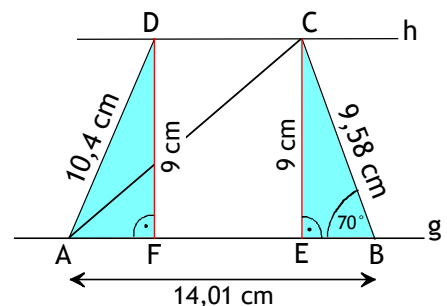
Im Dreieck BCE gilt: $\overline{BE}^2 + 9^2 = 9,58^2$

$$\Leftrightarrow \overline{BE}^2 + 81 = 91,78 \quad | -81$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE}^2 = 10,78 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \overline{BE} = 3,28 \text{ cm}$$

Damit erhält man: $\overline{CD} = 14,01 \text{ cm} - 5,21 \text{ cm} - 3,28 \text{ cm} = 5,52 \text{ cm}$



Figur 3

Für den Umfang $u = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + 10,4 \text{ cm}$ des Vierecks ABCD folgt somit: $u = 39,51 \text{ cm}$

Ergebnis: Der Umfang des Vierecks ABCD beträgt $u = 39,51 \text{ cm}$.

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1b:

Lösungsübersicht:

Für den Flächeninhalt des Trapezes ADEF gilt (siehe Figur 1): $A_{ADEF} = \frac{1}{2} (\overline{DE} + \overline{AF}) \cdot h$

Die Höhe h des Trapezes ist die angegebene Strecke $\overline{AD} = h = 5,0 \text{ cm}$.

- Die Strecke $\overline{DE}$ kann im Dreieck DBE berechnet werden, wenn man den Winkel β und die Strecke $\overline{BD}$ kennt (siehe Figur 2). Für die Strecke $\overline{BD}$ gilt: $\overline{BD} = \overline{AB} - 5,0$. Und $\overline{AB}$ wiederum kann mit $\gamma = 50^\circ$ und $\overline{AC} = 11,4 \text{ cm}$ im Dreieck ABC mit der Tangensfunktion berechnet werden. Den Winkel β erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC.
- Die Strecke $\overline{AF}$ kann im Dreieck AFB' berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{AB'}$ und den Winkel β' kennt (siehe Figur 1). Da sich weder der Winkel β noch die Strecke $\overline{BD}$ beim Umfallen ändern, gilt: $\beta' = \beta$ und $\overline{AB'} = \overline{B'D} - 5,0$; mit $\overline{B'D} = \overline{BD}$ (siehe Figur 4).

Tip: Wenn man überhaupt keinen Lösungsansatz erkennt, sollte man alle angegebenen Größen einzeichnen und zuerst im Dreieck ABC alle fehlenden Strecken und den Winkel β bestimmen.

Berechnung des Flächeninhalts des Trapezes ADEF:

Für den Flächeninhalt des Trapezes ADEF gilt (siehe Figur 1 und Formelsammlung): $A_{ADEF} = \frac{1}{2} (\overline{DE} + \overline{AF}) \cdot h$

Darin ist die Seite $\overline{DE}$ die Grundseite des Trapezes und $\overline{AF}$ die parallele Oberseite. Die Höhe h ist $h = \overline{AD} = 5,0 \text{ cm}$.

Es müssen also noch die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{AF}$ berechnet werden.

→ Berechnung der Strecke $\overline{DE}$:

Die Strecke $\overline{DE}$ kann im Dreieck DBE mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel β und die Strecke $\overline{BD}$ kennt (siehe Figur 2).

- Für die Strecke $\overline{BD}$ gilt: $\overline{BD} = \overline{AB} - 5,0$. Die Strecke $\overline{AB}$ kann im Dreieck ABC mit der Tangensfunktion

$$\text{berechnet werden: } \tan 50^\circ = \frac{\overline{AB}}{11,4} \quad | \cdot 11,4$$

$$\Leftrightarrow 13,59 = \overline{AB} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AB} = 13,59 \text{ cm}$$

$$\text{Somit folgt: } \overline{BD} = 13,59 \text{ cm} - 5,0 \text{ cm} = \underline{8,59 \text{ cm}}$$

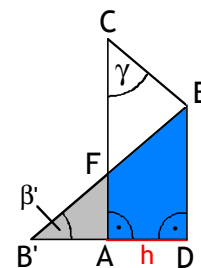
- Den Winkel β erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC:

$$50^\circ + 90^\circ + \beta = 180^\circ \Leftrightarrow \underline{\beta = 40^\circ}$$

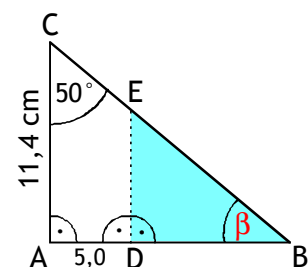
Im Dreieck DBE gilt also (siehe Figur 3):

$$\tan 40^\circ = \frac{\overline{DE}}{8,59} \quad | \cdot 8,59$$

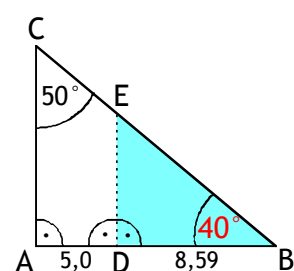
$$\Leftrightarrow 7,21 = \overline{DE} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\overline{DE} = 7,21 \text{ cm}}$$



Figur 1



Figur 2



Figur 3



Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W1

→ Berechnung der Strecke $\overline{AF}$:

Die Strecke $\overline{AF}$ kann im Dreieck AFB' mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{AB'}$ und den Winkel β' kennt (s. Figur 4).

Da sich weder der Winkel β noch die Strecke $\overline{BD}$ beim Umfalten ändern, gilt $\beta' = \beta = 40^\circ$ und $\overline{B'D} = \overline{BD} = 8,59 \text{ cm}$ (siehe oben).

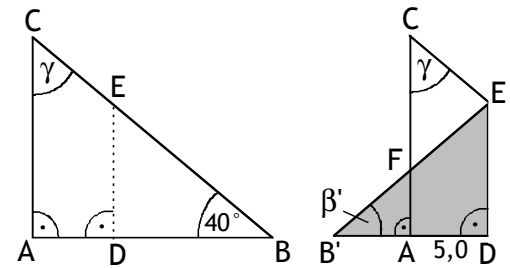
Damit folgt für $\overline{AB'} = \overline{B'D} - 5,0$:

$$\overline{AB'} = 8,59 \text{ cm} - 5,0 \text{ cm} = 3,59 \text{ cm}$$

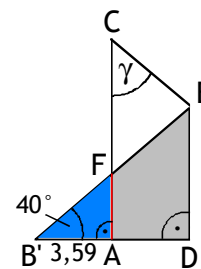
Für $\overline{AF}$ gilt also im Dreieck AFB' (siehe Figur 5):

$$\tan 40^\circ = \frac{\overline{AF}}{3,59} \quad | \cdot 3,59$$

$$\Leftrightarrow 3,01 = \overline{AF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AF} = 3,01 \text{ cm}$$



Figur 4



Figur 5

Mit $\overline{DE} = 7,21 \text{ cm}$ und $\overline{AF} = 3,01 \text{ cm}$ erhält man schließlich für den gesuchten Flächeninhalt

$$A_{\text{ADEF}} = \frac{1}{2} (\overline{DE} + \overline{AF}) \cdot 5,0 \text{ des Trapezes ADEF: } A_{\text{ADEF}} = \frac{1}{2} (7,21 + 3,01) \cdot 5,0 = 25,55 \text{ cm}^2$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Trapezes ADEF beträgt $A_{\text{ADEF}} = 25,55 \text{ cm}^2$.

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W2



Aufgabe W2a:

Lösungsübersicht:

Zur Berechnung des Pyramidenvolumens benötigt man den Flächeninhalt der Grundfläche G und die Pyramidenhöhe h_{Pyr} .

- Um die **Grundfläche G** der fünfseitigen Pyramide berechnen zu können, muss man die Länge der Kante a und die Höhe h_1 eines der fünf gleichschenkligen Dreiecke der Grundfläche kennen (siehe Figur 1 und 2). Die Kante a kann in einem der gleichschenkligen Dreiecke des *Mantels* mithilfe des Winkels γ und des Radius $r = 8,3$ cm berechnet werden (siehe Figur 3). Den Winkel γ erhält man mit Vollwinkel 360° und dem angegebenen Winkel 110° (siehe Figur 3). Mit dem Wert von a kann dann in einem der gleichschenkligen Dreiecke der *Grundfläche* auch die Höhe h_1 berechnet werden (siehe Figur 1).
- Die **Pyramidenhöhe h_{Pyr}** kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Länge eines Schenkels b der gleichschenkligen Dreiecke der *Grundfläche* kennt (siehe Figur 5). Der Schenkel b kann in einem gleichschenkligen Dreieck der Grundfläche ebenfalls mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 1 bzw. 4), da man die Längen von a und h_1 bereits bestimmt hat.

Berechnung des Pyramidenvolumens:

Für das Volumen der fünfseitigen Pyramide gilt (siehe Formelsammlung): $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} G \cdot h_{\text{Pyr}}$

→ Berechnung der Grundfläche G :

Die Grundfläche G der fünfseitigen Pyramide besteht aus fünf gleichschenkligen Dreiecken. Für den Flächeninhalt eines dieser Dreiecke gilt (siehe Figur 1 und 2):

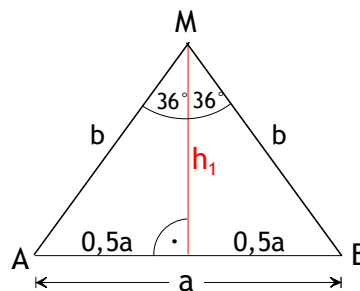
$$A_{\text{ABM}} = \frac{1}{2} a \cdot h_1$$

Somit gilt für die Grundfläche:

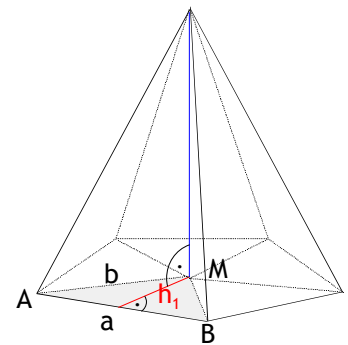
$$G = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1 = \frac{5}{2} a \cdot h_1$$

Beachte: Der Mittelpunktswinkel der Grundfläche G beträgt $72^\circ (= 360^\circ : 5)$.

Die Höhe h_1 bezüglich der Basis $\overline{AB}$ halbiert diesen Winkel, weil das Dreieck ABM gleichschenklig ist.



Figur 1



Figur 2

- Die Länge der Kante a kann in einem der gleichschenkligen Dreiecke des *Mantels* berechnet werden (siehe Figur 3). In dem blau markierten Dreieck gilt: $\sin \gamma = \frac{0,5a}{8,3}$. Der Winkel γ kann mit dem Vollwinkel 360° und dem angegebenen Winkel 110° berechnet werden. Es gilt:

$$110^\circ + 5 \cdot 2\gamma = 360^\circ$$

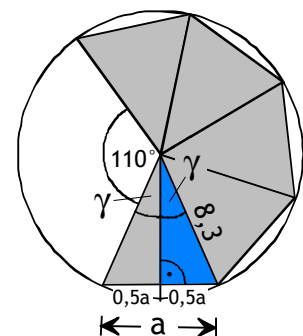
$$\Leftrightarrow 10\gamma = 250^\circ \quad | :10$$

$$\Leftrightarrow \gamma = 25^\circ$$

$$\text{Damit folgt: } \sin 25^\circ = \frac{0,5a}{8,3} \quad | \cdot 8,3$$

$$\Leftrightarrow 3,51 = 0,5a \quad | : 0,5$$

$$\Leftrightarrow 7,02 = a \quad \text{bzw. } \underline{a = 7,02 \text{ cm}}$$



Figur 3

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W2



- Die Höhe h_1 kann nun mit $a = 7,02 \text{ cm}$ bzw. $0,5a = 3,51 \text{ cm}$ im markierten Dreiecke von Figur 4 mit der Tangensfunktion berechnet werden. Darin gilt:

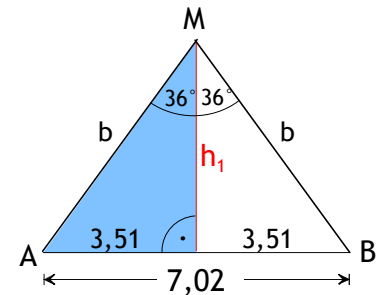
$$\tan 36^\circ = \frac{3,51}{h_1} \quad | \cdot h_1$$

$$\Leftrightarrow h_1 \cdot \tan 36^\circ = 3,51 \quad | : \tan 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow \underline{h_1 = 4,83 \text{ cm}}$$

Mit $a = 7,02 \text{ cm}$ und $h_1 = 4,83 \text{ cm}$ erhält man schließlich für G :

$$G = \frac{5}{2} \cdot 7,02 \text{ cm} \cdot 4,83 \text{ cm} = \mathbf{84,77 \text{ cm}^2}$$



Figur 4

→ Berechnung der Pyramidenhöhe h_{Pyr} :

Die Pyramidenhöhe h_{Pyr} kann im markierten Dreieck der Figur 5 mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Länge des Schenkels b kennt. Es gilt: $8,3^2 = b^2 + h_{\text{Pyr}}^2$

- Die Länge von b kann im markierten Dreieck von Figur 4 mit $h_1 = 4,83 \text{ cm}$ und dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Darin gilt: $b^2 = 3,51^2 + h_1^2$

Mit $h_1 = 4,83 \text{ cm}$ erhält man:

$$b^2 = 3,51^2 + 4,83^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 35,649 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \underline{b = 5,97 \text{ cm}}$$

Einsetzen von $b = 5,97 \text{ cm}$ in $8,3^2 = b^2 + h_{\text{Pyr}}^2$ ergibt:

$$8,3^2 = 5,97^2 + h_{\text{Pyr}}^2$$

$$\Leftrightarrow 68,89 = 35,64 + h_{\text{Pyr}}^2 \quad | -35,64$$

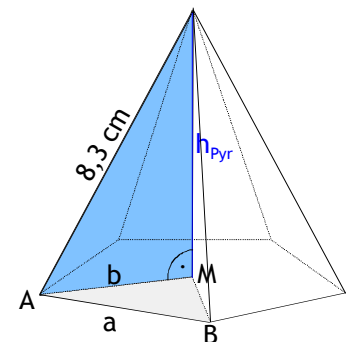
$$\Leftrightarrow 33,25 = h_{\text{Pyr}}^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow 5,77 = h_{\text{Pyr}} \text{ bzw. } \mathbf{h_{\text{Pyr}} = 5,77 \text{ cm}}$$

Mit $G = 84,77 \text{ cm}^2$ und $h_{\text{Pyr}} = 5,77 \text{ cm}$ erhält man schließlich für das Pyramidenvolumen:

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot 84,77 \text{ cm}^2 \cdot 5,77 \text{ cm} \approx \mathbf{163,0 \text{ cm}^3}$$

Ergebnis: Das Volumen der Pyramide beträgt $163,0 \text{ cm}^3$.



Figur 5

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W2



Aufgabe W2b:

Lösungsübersicht:

- Zur Berechnung der **Dreiecksfläche ABS** in Abhängigkeit von e benötigt man noch die Höhe h_e , die mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden kann (siehe Figur 1). Die Grundseite des Dreiecks ABS ist die Kante e .
- Zur Berechnung der **Dreiecksfläche CDS** in Abhängigkeit von e benötigt man die Grundseite $\overline{CD}$ und die Höhe h' des Dreiecks CDS (siehe Figur 2). Die Strecke $\overline{CD}$ ist halb so lang wie die Diagonale d der quadratischen Grundfläche. Dies folgt aus dem zweiten Strahlensatz (siehe Figur 3). Die Höhe h' kann mit dem Satz des Pythagoras in dem markierten Dreieck der Figur 4 in Abhängigkeit von e bestimmt werden, wenn man die Strecke $\overline{MF}$ kennt. Die Strecke $\overline{MF}$ wiederum kann mit dem ersten Strahlensatz in Abhängigkeit von e bestimmt werden (siehe Figur 5).

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ABS in Abhängigkeit von e :

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABS gilt: $A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot h_e$ (siehe Formelsammlung und Figur 1)

Die Höhe h_e kann in dem markierten Dreieck von Figur 1 mit dem Satz des Pythagoras in Abhängigkeit von e bestimmt werden.

Darin gilt:

$$h_e^2 = e^2 + (0,5e)^2$$

$$\Leftrightarrow h_e^2 = e^2 + 0,25e^2$$

$$\Leftrightarrow h_e^2 = e^2 + \frac{1}{4}e^2$$

$$\Leftrightarrow h_e^2 = \frac{5}{4}e^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow h_e = \sqrt{\frac{5}{4}e^2} \quad | \text{ Teilweise Wurzelziehen}$$

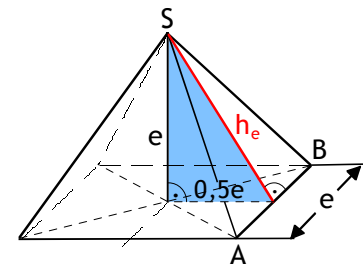
$$\Leftrightarrow h_e = \frac{e}{2} \sqrt{5}$$

Einsetzen in $A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot h_e$ ergibt:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{e}{2} \sqrt{5} = \frac{e^2}{4} \sqrt{5}.$$

Das ist die **Formel (3)**.

Ergebnis: Zur Dreiecksfläche ABS gehört die **Formel (3)**.



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W2



Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks CDS in Abhängigkeit von e:

Für den Flächeninhalt des Dreiecks CDS gilt (siehe Figur 2): $A_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h'$

→ Berechnung der Strecke $\overline{CD}$:

Die Strecke $\overline{CD}$ kann in der markierten Fläche von Figur 3 mit dem zweiten Strahlensatz bestimmt werden (mit dem Zentrum Z).

$$\text{Es gilt: } \frac{d}{\overline{CD}} = \frac{e}{0,5e} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{\overline{CD}} = \frac{2}{1}$$

Mit $d = e\sqrt{2}$ (siehe Formelsammlung) erhält man:

$$\frac{e\sqrt{2}}{\overline{CD}} = \frac{2}{1} \quad | \cdot \overline{CD}$$

$$\Leftrightarrow e\sqrt{2} = 2\overline{CD} \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e\sqrt{2}}{2} = \overline{CD} \quad \text{bzw.} \quad \overline{CD} = \frac{e\sqrt{2}}{2}$$

(Hinweis: Man kann die Strecke $\overline{CD}$ auch mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck CZD berechnen; siehe Figur 3).

→ Berechnung der Höhe h' :

Die Höhe h' kann im markierten Dreieck der Figur 4 mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{MF}$ kennt. Es gilt: $h'^2 = e^2 + \overline{MF}^2$

Die Strecke $\overline{MF}$ kann in der markierten Fläche von Figur 5 mit dem ersten Strahlensatz bestimmt werden (mit dem Zentrum Z).

$$\text{Es gilt: } \frac{\overline{MF}}{0,5d} = \frac{0,5e}{e} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\overline{MF}}{0,5d} = 0,5$$

Mit $d = e\sqrt{2}$ (vgl. oben) erhält man:

$$\frac{\overline{MF}}{0,5e\sqrt{2}} = 0,5 \quad | \cdot 0,5e\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MF} = 0,25e\sqrt{2}$$

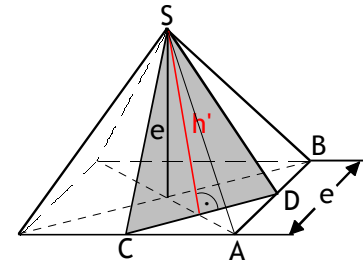
$$\Leftrightarrow \overline{MF} = \frac{e\sqrt{2}}{4}$$

Einsetzen in $h'^2 = e^2 + \overline{MF}^2$ ergibt:

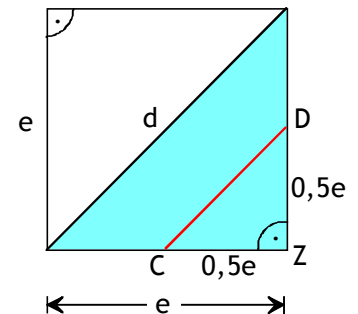
$$h'^2 = e^2 + \left(\frac{e\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow h'^2 = e^2 + \frac{e^2 \cdot 2}{16}$$

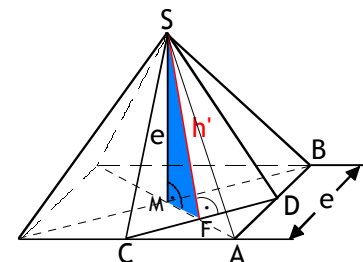
$$\Leftrightarrow h'^2 = e^2 + \frac{e^2}{8}$$



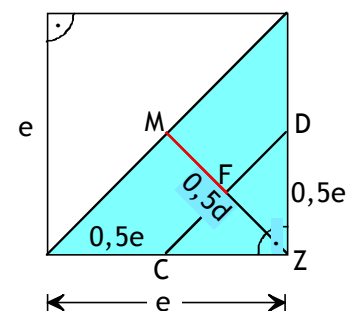
Figur 2



Figur 3



Figur 4



Figur 5

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W2



$$\Leftrightarrow h'^2 = \frac{9e^2}{8} \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow h' = \sqrt{\frac{9e^2}{8}} \quad | \text{ Teilweise Wurzelziehen}$$

$$\Leftrightarrow h' = 3e \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$\Leftrightarrow h' = 3e \frac{1}{\sqrt{8}} \quad | \text{ Rational machen des Nenners}$$

$$\Leftrightarrow h' = 3e \frac{1 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}}$$

$$\Leftrightarrow h' = 3e \frac{\sqrt{8}}{8} \quad | \text{ Teilweise Wurzelziehen von } \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4}$$

$$\Leftrightarrow h' = 3e \frac{2\sqrt{2}}{8}$$

$$\Leftrightarrow h' = 3e \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Mit $\overline{CD} = \frac{e\sqrt{2}}{2}$ und $h' = 3e \frac{\sqrt{2}}{4}$ erhält man für $A_{\text{CDS}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h'$:

$$A_{\text{CDS}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e\sqrt{2}}{2} \cdot 3e \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{CDS}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} e^2$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{CDS}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} e^2$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{CDS}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{16} e^2$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{CDS}} = \frac{3 \cdot 2}{16} e^2$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{CDS}} = \frac{3}{8} e^2$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{CDS}} = \frac{3e^2}{8}$$

Das ist die **Formel (1)**.

Ergebnis: Zur Dreiecksfläche CDS gehört die Formel (1).

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W3



Aufgabe W3a:

Lösungsübersicht:

- Die **Gleichung der Parabel p_1** kann mithilfe der Koordinaten der Punkte A und B bestimmt werden, indem man die Koordinaten von $A(-3|-1)$ und $B(1|-1)$ jeweils in die allgemeine Gleichung $y = x^2 + bx + c$ einsetzt und dann das resultierende Gleichungssystem löst.
- Um die **Gleichung der Geraden g** aufstellen zu können, muss man zuerst den Scheitelpunkt S_1 der Parabel p_1 bestimmen, durch den die Gerade g verlaufen soll. Dazu muss die Gleichung von p_1 mit einer quadratischen Ergänzung in die Scheitelform umgewandelt werden. Mit den beiden Scheitelpunkten S_1 und $S_2(0|8)$ kann dann die Gleichung der Geraden g berechnet werden, indem man die Koordinaten dieser Punkte in die allgemeine Gleichung $y = m \cdot x + c$ einsetzt.
- Da die **Gerade h** parallel zur Geraden g verlaufen soll, hat sie die gleiche Steigung wie g . Um den y-Achsenabschnitt von h berechnen zu können, benötigt man die Koordinaten eines Geradenpunkts von h . Man muss also zuerst die Schnittpunkte von p_1 und p_2 berechnen, da die Gerade h durch einen dieser beiden Schnittpunkte gehen soll. Zur Berechnung dieser Schnittpunkte benötigt man noch die Gleichung der Normalparabel p_2 , die man mithilfe des Scheitelpunkts $S_2(0|8)$ aufstellen kann. Man beachte dabei, dass p_2 nach unten geöffnet ist.

Berechnung der Gleichung der Parabel p_1 :

Durch Einsetzen der Koordinaten von $A(-3|-1)$ und $B(1|-1)$ in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\text{Mit } A(-3|-1): \quad -1 = (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \Leftrightarrow -1 = 9 - 3b + c \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit } B(1|-1): \quad -1 = 1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow -1 = 1 + b + c \quad (\text{II})$$

$$(I) - (II) \text{ ergibt: } 0 = 8 - 4b \quad | +4b$$

$$\Leftrightarrow 4b = 8 \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow b = 2$$

Einsetzen von $b = 2$ in Gleichung (II) $-1 = 1 + b + c$ ergibt:

$$-1 = 1 + 2 + c$$

$$\Leftrightarrow -1 = 3 + c \quad | -3$$

$$\Leftrightarrow -4 = c \text{ bzw. } c = -4$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Parabel p_1 lautet $y = x^2 + 2x - 4$.

Berechnung der Gleichung der Geraden g :

Zunächst muss der zweite Scheitelpunkt S_1 bestimmt werden, durch den die Gerade g verlaufen soll. Dazu muss die Gleichung $p_1: y = x^2 + 2x - 4$ mithilfe einer quadratischen Ergänzung in die Scheitelform umgewandelt werden:

$$y = x^2 + 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 2x + 1^2 - 4 - 1^2 \quad | \text{ Anwenden der ersten binomischen Formel}$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 1)^2 - 5$$

Damit ist der Scheitelpunkt $S_1(-1|-5)$.

Durch jeweiliges Einsetzen der Koordinaten von $S_1(-1|-5)$ und $S_2(0|8)$ in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ erhält man:

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W3



Mit $S_1(-1|-5)$: $-5 = m \cdot (-1) + c \Leftrightarrow -5 = -1m + c \quad (I)$

Mit $S_2(0|8)$: $8 = m \cdot 0 + c \Leftrightarrow 8 = c \text{ bzw. } c = 8 \quad (II)$

Einsetzen von $c = 8$ in Gleichung (I) ergibt: $-5 = -1m + 8 \quad | +1m + 5$
 $\Leftrightarrow 1m = 13 \text{ bzw. } m = 13$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Geraden g lautet $y = 13x + 8$.

Eine mögliche Gleichung der Geraden h:

Da die Gerade h parallel zur Geraden g verlaufen soll, hat sie die gleiche Steigung wie g. Ihre unvollständige Gleichung lautet also h: $y = 13x + c^*$.

Um einen möglichen Wert für den y-Achsenabschnitt c^* berechnen zu können, muss man die Koordinaten der Schnittpunkte von p_1 und p_2 kennen, da die Gerade h durch einen dieser beiden Schnittpunkte gehen soll. Zur Berechnung dieser Schnittpunkte benötigt man noch die Gleichung der Normalparabel p_2 .

→ Die Gleichung der Normalparabel p_2 :

Weil der Scheitelpunkt $S_2(0|8)$ auf der y-Achse liegt und p_2 nach unten geöffnet sein soll, hat p_2 eine Gleichung der Form $y = -x^2 + c$. Der Wert von c ist die y-Koordinate von $S_2(0|8)$; also $c = 8$. Die Gleichung von p_2 lautet also: $y = -x^2 + 8$

(Hinweis: Man hätte die Koordinaten von $S_2(0|8)$ auch in die Scheitelform $y = -(x - d)^2 + e$ einsetzen können: für $d = 0$ und für $e = 8$.)

→ Die Schnittpunkte von p_1 und p_2 :

Gleichsetzen von p_1 : $y = x^2 + 2x - 4$ und p_2 : $y = -x^2 + 8$ ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 4 &= -x^2 + 8 & | +x^2 - 8 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 &= 0 & | :2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 1x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Mit der Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$$x_1 = -0,5 + \sqrt{0,5^2 + 6} = 2 \text{ und } x_2 = -0,5 - \sqrt{0,5^2 + 6} = -3$$

Einsetzen von $x_1 = 2$ in p_1 : $y = x^2 + 2x - 4$ ergibt: $y_1 = 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = 4 \Rightarrow P(2|4)$

Einsetzen von $x_2 = -3$ in p_1 : $y = x^2 + 2x - 4$ ergibt: $y_2 = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 4 = -1 \Rightarrow Q(-3|-1)$

(Hinweis: Man hätte die x-Koordinaten auch in die Gleichung von p_2 einsetzen können.)

Mit den Koordinaten der Schnittpunkte $P(2|4)$ und $Q(-3|-1)$ kann nun ein möglicher Wert für c^* in der Geradengleichung h: $y = 13x + c^*$ bestimmt werden.

Einsetzen der Koordinaten von $P(2|4)$ in $y = 13x + c^*$ ergibt: $4 = 26 + c_1^* \Leftrightarrow c_1^* = -22$

Einsetzen der Koordinaten von $Q(-3|-1)$ in $y = 13x + c^*$ ergibt: $-1 = -39 + c_2^* \Leftrightarrow c_2^* = 38$

Ergebnis: Mögliche Gleichungen der Geraden h sind:

$y = 13x - 22$, wenn h durch $P(2|4)$ verläuft. Oder $y = 13x + 38$, wenn h durch $Q(-3|-1)$ verläuft.

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W3



Aufgabe W3b:

Lösungsübersicht:

- Um die **Schnittpunkte P und Q der Parabeln p_1 und p_2** bestimmen zu können, muss man ihre Gleichungen zunächst gleichsetzen. Den Wert von c in der Gleichung von p_1 muss man zuerst durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes $R(4|0)$ berechnen.
- Das **Viereck S_1PS_2Q** kann mit trigonometrischen Überlegungen auf rechte Winkel untersucht werden. Um das Viereck S_1PS_2Q in ein Koordinatensystem einzeichnen zu können, benötigt man aber noch die Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 und S_2 , die direkt an den beiden Parabelgleichungen abgelesen werden können. (Die Gleichung von p_1 und die Koordinaten von P und Q wurden bereits im ersten Aufgabenteil bestimmt.) Man beachte, dass man aus Symmetriegründen nur eine Hälfte des Vierecks S_1PS_2Q untersuchen muss.

Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabeln p_1 und p_2 :

Zunächst muss man die vollständige Gleichung der Parabel p_1 : $y = \frac{1}{4}x^2 + c$ bestimmen.

→ Die vollständige Gleichung der Parabel p_1 :

Einsetzen der Koordinaten von $R(4|0)$ in $y = \frac{1}{4}x^2 + c$ ergibt:

$$0 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 + c$$

$$\Leftrightarrow 0 = 4 + c \quad | -4$$

$$\Leftrightarrow -4 = c \quad \text{bzw.} \quad c = -4$$

Damit lautet die vollständige Gleichung von p_1 : $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$

Gleichsetzen von p_1 : $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ und p_2 : $y = -x^2 + 1$ ergibt:

$$\frac{1}{4}x^2 - 4 = -x^2 + 1 \quad | +x^2 + 4 \quad | \text{Bei einer rein-quadratischen Gleichung muss „}x^2\text{“ isoliert werden.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 = 5 \quad | : \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \quad | \pm \sqrt{}$$

$$\Rightarrow x_1 = +2 \quad \text{und} \quad x_2 = -2$$

Einsetzen von $x_1 = +2$ in p_2 : $y = -x^2 + 1$ ergibt: $y_1 = -(2^2) + 1 = -4 + 1 = -3 \Rightarrow P(2|-3)$

Einsetzen von $x_2 = -2$ in p_2 : $y = -x^2 + 1$ ergibt: $y_2 = -((-2)^2) + 1 = -4 + 1 = -3 \Rightarrow Q(-2|-3)$

(Hinweis: Man hätte die x-Koordinaten auch in die Gleichung von p_1 einsetzen können.)

Ergebnis: Die Schnittpunkte P und Q haben die Koordinaten $P(2|-3)$ und $Q(-2|-3)$.

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W3



Hat das Viereck S_1PS_2Q zwei rechte Winkel ?

Indem man das Viereck S_1PS_2Q in ein Koordinatensystem einzeichnet, kann man es mithilfe trigonometrischer Überlegungen auf rechte Winkel untersuchen. Die Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 und S_2 können direkt an den Parabelgleichungen $p_1: y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ und $p_2: y = -x^2 + 1$ abgelesen werden: $S_1(0|-4)$ und $S_2(0|1)$. Mit den Punkten $P(2|-3)$ und $Q(-2|-3)$ erhält man die Zeichnung in Figur 1.

Aus Symmetriegründen genügt es im Folgenden, nur eine Hälfte des Vierecks S_1PS_2Q zu betrachten.

→ Berechnung des Winkels β bei $P(2|-3)$:

• Erste Möglichkeit:

Man prüft, ob im Dreieck S_1PS_2 der Satz des Pythagoras gilt. Ist dies der Fall, dann muss es rechtwinklig sein (siehe Figur 1).

Die Länge $\overline{S_1S_2}$ kann direkt in der Zeichnung abgelesen werden:

$\overline{S_1S_2} = 5$. Die Längen $\overline{S_1P}$ und $\overline{S_2P}$ können mit der Formel

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ berechnet werden. Man erhält:

Länge zwischen $S_1(0|-4)$ und $P(2|-3)$: $\overline{S_1P} = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-(-4))^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Länge zwischen $S_2(0|1)$ und $P(2|-3)$: $\overline{S_2P} = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$

Falls $\beta = 90^\circ$ ist, lautet der Satz des Pythagoras: $5^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{20}^2$

$$\Leftrightarrow 25 = 5 + 20$$

Das ist eine wahre Aussage, also gilt der Satz des Pythagoras. Somit ist das Dreieck S_1PS_2 rechtwinklig mit $\beta = 90^\circ$. Aus Symmetriegründen muss dann auch der Winkel bei Q rechtwinklig sein.

• Zweite Möglichkeit:

Man berechnet mithilfe trigonometrischer Funktionen die beiden Winkel β_1 und β_2 (siehe Figur 2) und prüft, ob $\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$ gilt.

(Hinweis: Die Längen der Katheten in den Dreiecken TPS_2 und S_1PT können in der Zeichnung abgelesen werden.)

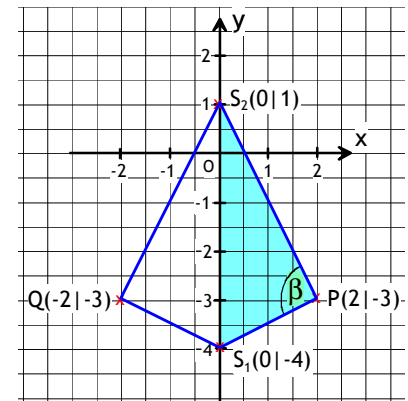
Im Dreieck TPS_2 gilt: $\tan \beta_1 = \frac{4}{2} \quad | \quad \tan^{-1}$

$$\Rightarrow \beta_1 = 63,43^\circ$$

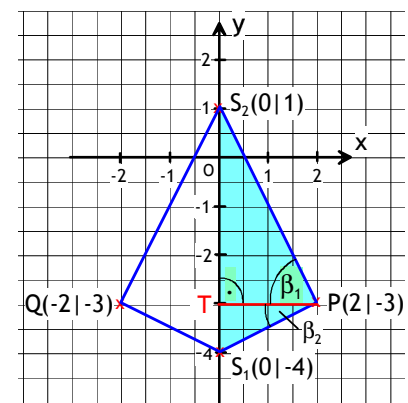
Im Dreieck S_1PT gilt: $\tan \beta_2 = \frac{1}{2} \quad | \quad \tan^{-1}$

$$\Rightarrow \beta_2 = 26,57^\circ$$

Wegen $\beta_1 + \beta_2 = 63,43^\circ + 26,57^\circ = 90^\circ$ ist $\beta = 90^\circ$.



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W3



Um zu prüfen, ob das Viereck noch **weitere rechte Winkel** hat, muss man die Winkel α_1 und α_2 bestimmen (siehe Figur 3). Falls α_1 und α_2 jeweils $\neq 45^\circ$ sind, gibt es aus Symmetriegründen keine weiteren rechten Winkel.

• **Erste Möglichkeit:**

Man kann argumentieren, dass α_1 und α_2 jeweils $\neq 45^\circ$ sein müssen, weil das Dreieck S_1PS_2 nicht gleichschenkelig ist. Somit kann aus Symmetriegründen weder bei S_1 noch bei S_2 ein rechter Winkel vorliegen.

• **Zweite Möglichkeit:**

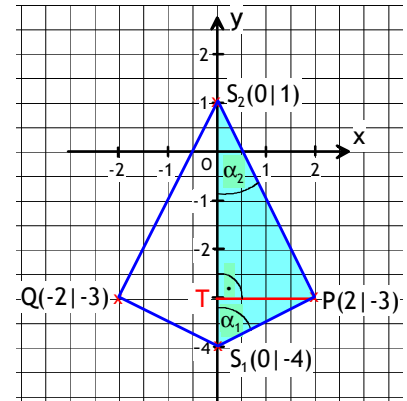
Man berechnet mithilfe trigonometrischer Funktionen die beiden Winkel α_1 und α_2 (siehe Figur 3).

Im Dreieck S_1PT gilt: $\tan \alpha_1 = \frac{2}{1} \quad | \tan^{-1}$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 63,43^\circ \neq 45^\circ$$

Im Dreieck TPS_2 gilt: $\tan \alpha_2 = \frac{2}{4} \quad | \tan^{-1}$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 26,57^\circ \neq 45^\circ$$



Figur 3

Somit hat das Viereck S_1PS_2Q bei P und Q die einzigen rechten Winkel.

Ergebnis:

Weil das Viereck S_1PS_2Q bei den Ecken Q und P jeweils einen rechten Winkel hat und bei den Ecken S_1 und S_2 keinen, hat es genau zwei rechte Winkel. **Mia hat also Recht.**

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W4



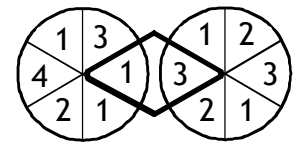
Aufgabe W4a:

Lösungsübersicht:

- Die Ergebnisse zum Ereignis „Zahl mit zwei gleichen Ziffern“, sind (1; 1), (2; 2) und (3; 3). Deren Wahrscheinlichkeiten können jeweils mit der Produktregel berechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zwei gleiche Ziffern“ ergibt sich dann mit der Summenregel.
- Zur Berechnung des Erwartungswerts (siehe Formelsammlung) benötigt man noch die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zahl größer als 40“. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „restliche Möglichkeiten“ braucht nicht berechnet werden, weil bei diesem Ereignis kein Gewinn ausgezahlt wird. Hingegen darf der Einsatz bei der Berechnung des Erwartungswerts nicht vergessen werden.
- Wenn man im rechten Glücksrad eine Drei durch eine Fünf ersetzt, ändert sich lediglich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zwei gleiche Ziffern“. Mit dieser neuen Wahrscheinlichkeit kann dann der neue Erwartungswert berechnet werden.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei gleiche Ziffern:

Zum Ereignis „zwei gleiche Ziffern“ gehören die Ergebnisse (1; 1), (2; 2) und (3; 3). Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ergebnisse können mit der Produktregel berechnet werden.



Im linken Glücksrad gilt: $p_L(1) = \frac{3}{6}$; $p_L(2) = \frac{1}{6}$ und $p_L(3) = \frac{1}{6}$

Im rechten Glücksrad gilt: $p_R(1) = \frac{2}{6}$; $p_R(2) = \frac{2}{6}$ und $p_R(3) = \frac{2}{6}$

Mit der Produktregel erhält man:

$$p(1; 1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{36}; \quad p(2; 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36} \quad \text{und} \quad p(3; 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$$

Mit der Summenregel folgt schließlich:

$$P(\text{zwei gleiche Ziffern}) = p(1; 1) + p(2; 2) + p(3; 3) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 27,8 \%$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern beträgt $\frac{5}{18} \approx 27,8 \%$.

Berechnung des Erwartungswerts:

Für den Erwartungswert E aus Sicht eines Spielers gilt (siehe Formelsammlung):

$$E = P(\text{zwei gleiche Ziffern}) \cdot 3,00 \text{ €} + P(\text{Zahl größer 40}) \cdot 5,00 \text{ €} + P(\text{restliche}) \cdot 0 \text{ €} + 1 \cdot (-2,00 \text{ €})$$

$$\Leftrightarrow E = P(\text{zwei gleiche Ziffern}) \cdot 3,00 \text{ €} + P(\text{Zahl größer 40}) \cdot 5,00 \text{ €} - 2,00 \text{ €}$$

$$\text{Mit } P(\text{zwei gleiche Ziffern}) = \frac{5}{18} \text{ folgt: } E = \frac{5}{18} \cdot 3,00 \text{ €} + P(\text{Zahl größer 40}) \cdot 5,00 \text{ €} - 2,00 \text{ €}$$

Hinweise:

- 1.) Die Wahrscheinlichkeit für den Einsatz ist „1“, da ohne Einsatz erst gar nicht gespielt werden kann.
- 2.) Der Eurobetrag für den Einsatz muss aus Sicht des Spielers negativ gewertet werden.
- 3.) Es ist $P(\text{restliche}) \cdot 0 \text{ €} = 0 \text{ €}$. Und zur Erinnerung: In einer Summe kann der Summand „0“ weggelassen werden.



Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W4

Zur Berechnung des Erwartungswerts benötigt man also noch die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zahl größer als 40“. Dieses Ereignis trifft ein, wenn im linken Glücksrad die Ziffer „4“ erscheint. Unabhängig davon, welche Ziffer im rechten Glücksrad erscheint, ist die im Sichtfenster angezeigte Zahl dann *immer* größer als 40.

$$\text{Es gilt also: } p(\text{Zahl größer als 40}) = p_L(4) = \frac{1}{6}$$

Damit folgt für den Erwartungswert (aus Sicht eines Spielers):

$$E = \frac{5}{18} \cdot 3,00 \text{ €} + \frac{1}{6} \cdot 5,00 \text{ €} - 2,00 \text{ €} = -\frac{1}{3} \text{ €} \approx -0,33 \text{ €}$$

Aus Sicht des *Betreibers* des Glücksspiels beträgt der Erwartungswert also $E^* = +0,33 \text{ €}$.

Ergebnis: Der **Betreiber** kann mit einem Erwartungswert von 0,33 € rechnen.

Berechnung des neuen Erwartungswerts, wenn rechts eine „3“ durch eine „5“ ersetzt wird:

Wenn im rechten Glücksrad eine „3“ durch eine „5“ ersetzt wird, ändert sich nur die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zwei gleiche Ziffern“. Die Wahrscheinlichkeit $p(\text{Zahl größer als 40}) = \frac{1}{6}$ bleibt

gleich. Auch an den Wahrscheinlichkeiten $p(1; 1) = \frac{6}{36}$ und $p(2; 2) = \frac{2}{36}$ ändert sich nichts.

Mit $p_{\text{neu}}(3; 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ erhält man:

$$P_{\text{neu}}(\text{zwei gleiche Ziffern}) = p(1; 1) + p(2; 2) + p_{\text{neu}}(3; 3) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 25 \%$$

Damit folgt für den neuen Erwartungswert aus Sicht eines Spielers:

$$E_{\text{neu}} = \frac{1}{4} \cdot 3,00 \text{ €} + \frac{1}{6} \cdot 5,00 \text{ €} - 2,00 \text{ €} = -\frac{5}{12} \text{ €} \approx -0,42 \text{ €}. \text{ Der Betreiber macht also } 0,42 \text{ € Gewinn.}$$

Ergebnis:

Für den **Betreiber** wäre das geänderte Glücksrad vorteilhaft, weil er dann mit einem **Erwartungswert von 0,42 €** rechnen kann.

Hinweis: Man könnte auch qualitativ so argumentieren: Weil sich die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis (3; 3) reduziert, wird die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zwei gleiche Ziffern“ kleiner. Dadurch verringert sich der Erwartungswert aus Sicht des Spielers, was für den Betreiber vorteilhaft wäre.



Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W4

Aufgabe W4b:

Lösungsübersicht:

- Um eine **Gleichung der Parabel p** angeben zu können, muss man zunächst ein Achsenkreuz einzeichnen - und zwar so, dass der Scheitelpunkt der Flugbahn auf der y-Achse liegt und Dirk auf der x-Achse steht (siehe Figur 1). In diesem Achsenkreuz können mithilfe der angegebenen Maße die Koordinaten des Scheitelpunkts und eines weiteren Parabelpunktes bestimmt werden. Mit diesen Koordinaten können dann in der Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ die Werte von a und c bestimmt werden.
- **Dirk trifft nur dann** in den Korb, wenn der Korb auf der Flugbahn des Balles liegt. Man muss also zunächst die Koordinaten des Korbs ablesen (siehe Figur 2) und dann mithilfe der Gleichung der Parabel p eine Punktprobe machen. Wenn dabei eine wahre Aussage entsteht, liegt der Korb auf der Flugbahn des Balles; ansonsten verfehlt der Ball sein Ziel.
- Der **Abwehrspieler Dennis** berührt den Ball, wenn die Flugbahn des Balles an der Stelle, wo Dennis steht, eine geringere Höhe als 2,30 m hat. Dies kann überprüft werden, indem man die x-Koordinate des Standorts von Dennis in die Parabelgleichung einsetzt (siehe Figur 3 und 4).

Die Gleichung der Parabel p:

Zunächst muss man ein Achsenkreuz in die Zeichnung einzeichnen (siehe Figur 1). Darin hat der Scheitelpunkt die Koordinaten $S(0|3,6)$. Der Wert von c in der allgemeinen Gleichung der Parabel $y = ax^2 + c$ ist die y-Koordinate des Scheitelpunkts $S(0|3,6)$. Also lautet die unvollständige Parabelgleichung von p: $y = ax^2 + 3,6$

Den Wert von a kann man bestimmen, indem man die Koordinaten eines Parabelpunktes in die Gleichung $y = ax^2 + 3,6$ einsetzt. Der Zeichnung kann man entnehmen, dass der Punkt $P(-2,8|2)$ auf der Parabel liegt.

(Hinweis: Die Abbildung in der Aufgabenstellung ist nicht ganz exakt, weil der Abwurfpunkt des Balles darin etwas links von $P(-2,8|2)$ liegt.)

Einsetzen der Koordinaten von $P(-2,8|2)$ in $y = ax^2 + 3,6$ ergibt:

$$2 = a \cdot (-2,8)^2 + 3,6$$

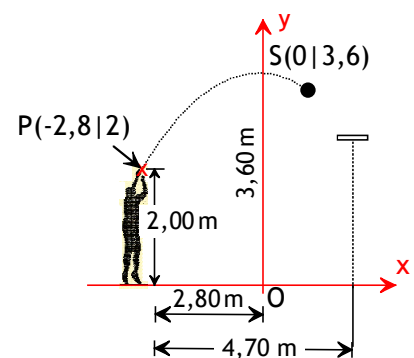
$$\Leftrightarrow 2 = a \cdot 7,84 + 3,6 \quad | -3,6$$

$$\Leftrightarrow -1,6 = a \cdot 7,84 \quad | :7,84$$

$$\Leftrightarrow -0,204 = a \quad \text{bzw.} \quad a = -0,204$$

Damit lautet die vollständige Gleichung von p: $y = -0,204x^2 + 3,6$

(Hinweis: Der exakte Wert von a ist $a = -\frac{10}{49}$.)



Figur 1

Ergebnis: Eine Gleichung der Parabel p ist $y = -0,204x^2 + 3,6$.

Lösungen zur Prüfung 2016: Wahlbereich - Aufgabe W4



Trifft Dirk in den Korb ?

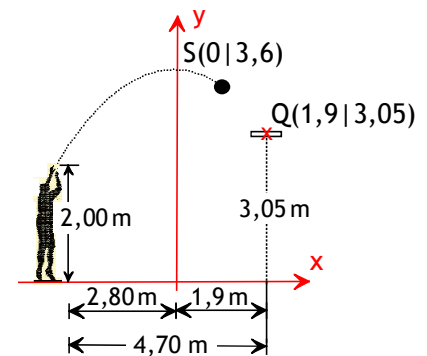
Die x-Koordinate des Korbs ist die Differenz zwischen 4,70 und 2,80; also $x = 1,9$ (siehe Figur 2). Die y-Koordinate des Korbs ist seine Höhe 3,05 m. Also wird die Lage des Korbs durch den Punkt $Q(1,9 | 3,05)$ beschrieben. Die Punktprobe mit der Parabelgleichung $y = -0,204x^2 + 3,6$ ergibt:

$$3,05 = -0,204 \cdot 1,9^2 + 3,6$$

$\Leftrightarrow 3,05 = 2,86$; falsche Aussage !

Also liegt Q nicht auf der Parabel, und der Ball geht nicht in den Korb.

Ergebnis: Dirk trifft nicht in den Korb.



Figur 2

Berührt der Abwehrspieler Dennis den Ball ?

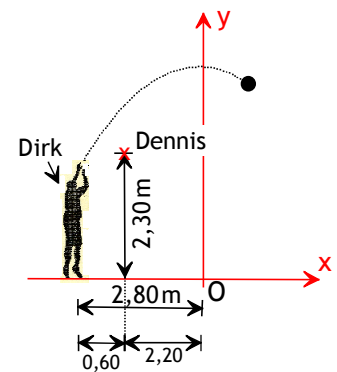
Man muss die Höhe 2,30 m von Dennis mit der Höhe der Parabel an der Stelle vergleichen, wo Dennis steht. Da Dennis 0,60 m vor Dirk stehen soll, ist sein Ort auf der x-Achse die Koordinate $x = -2,80 + 0,60 = -2,20 = -2,2$ (siehe Figur 3).

Die Höhe der Parabel an der Stelle $x = -2,2$ erhält man, indem man $x = -2,2$ in die Parabelgleichung $y = -0,204x^2 + 3,6$ einsetzt (siehe Figur 4).

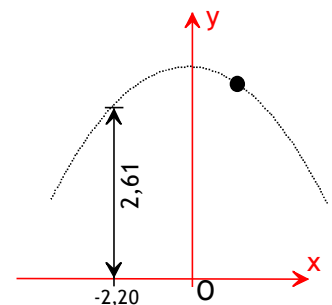
Man erhält: $y = -0,204 \cdot (-2,2)^2 + 3,6 = 2,61 > 2,3$

Das heißt, Dennis' Hand liegt noch unterhalb der Flugbahn des Balles. Dennis berührt den Ball somit nicht.

Ergebnis: Dennis berührt den Ball nicht, ohne hochzuspringen.



Figur 3



Figur 4