

Inhalt der Lösungen zur Prüfung 2022:



Teil A₁ und A₂ - Pflichtteil:

Pflichtteil A1	2
Pflichtteil A2	6

Teil B - Wahlteil:

Aufgabe W1a	12
Aufgabe W1b	14
Aufgabe W2a	17
Aufgabe W2b	20
Aufgabe W3a	22
Aufgabe W3b	24
Aufgabe W4a	26
Aufgabe W4b	28

Wichtige Hinweise zum Copyright:

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und nur für die eigene Nutzung zugelassen. Kopieren und Vervielfältigen der vorliegenden Datei ist verboten! Jede Nutzung in anderen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags.

Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung vervielfältigt oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Ausgenommen von diesen Regelungen ist die **Verwendung für folgende Unterrichtszwecke:**

So dürfen Lehrkräfte die vorliegende Datei zu Unterrichtszwecken ausdrucken, mit elektronischen Projektionsverfahren (wie Laptop und Beamer) einsetzen und OHP-Folien erstellen. Verboten ist allerdings die Weitergabe der Datei auf elektronischen Datenträgern.

Verstöße werden strafrechtlich verfolgt!

© Mathematik-Verlag 2026, Mosbach

Mathematik-Verlag Rainer Hild
Steige 44-2
74821 Mosbach
Internet: <https://matheverlag.com>
E-Mail: info@matheverlag.com

Lösungen zur Prüfung 2022: Pflichtteil A1

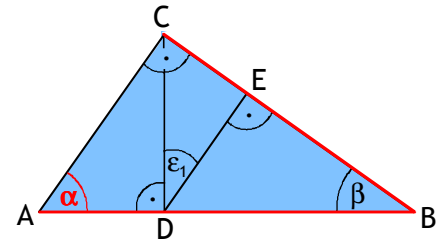


Aufgabe 1:

Vervollständigen der drei Gleichungen:

a) Für die erste Gleichung muss man das rechtwinklige Dreieck ABC betrachten. Darin ist die Strecke $\overline{AB}$ die Hypotenuse. Vom Winkel α aus gesehen ist die Strecke $\overline{BC}$ die Gegenkathete. Also gilt (siehe Figur 1):

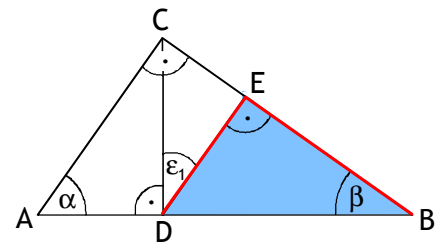
$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$



Figur 1

b) Für die zweite Gleichung muss man das rechtwinklige Dreieck DBE betrachten. Vom Winkel β aus gesehen ist darin die Strecke $\overline{DE}$ die Gegenkathete und die Strecke $\overline{BE}$ die Ankathete. Also gilt (siehe Figur 2):

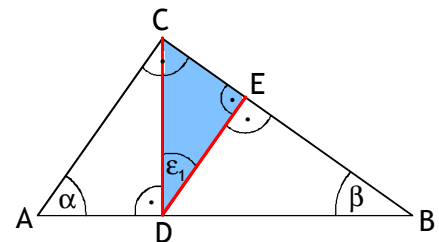
$$\tan \beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}}$$



Figur 2

c) Für die dritte Gleichung muss man das rechtwinklige Dreieck DEC betrachten. Darin ist die Strecke $\overline{CD}$ die Hypotenuse. Vom Winkel ϵ_1 aus gesehen ist die Strecke $\overline{DE}$ die Ankathete. Also gilt (siehe Figur 3):

$$\cos \epsilon_1 = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}$$



Figur 3

Aufgabe 2:

a) Das Volumen der Wassermenge:

Das Volumen der Wassermenge ist das Volumen der quadratischen Pyramide.

Einsetzen von $a = 6 \text{ cm}$ und $h = 4 \text{ cm}$ in die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ ergibt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^3; \quad \text{Hinweis: Es ist } \frac{1}{3} \cdot 36 = \frac{36}{3} = 36 : 3 = 12.$$

Ergebnis: Das Volumen der Wassermenge ist $V_W = 48 \text{ cm}^3$.

b) Die Höhe des Wassers im quadratischen Prisma:

Der Wasserstand in dem quadratischen Prisma sei h_W (siehe Figur 4). Dann gilt für das prismenförmige Wasservolumen (siehe Formelsammlung):

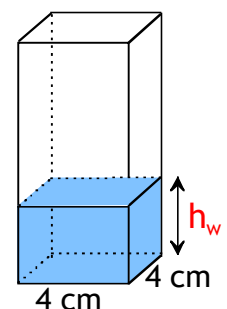
$$V_W = 4^2 \cdot h_W \text{ bzw. } V_W = 16 \cdot h_W$$

Einsetzen des Wasservolumens $V_W = 48 \text{ cm}^3$ in $V_W = 16 \cdot h_W$ ergibt:

$$48 = 16 \cdot h_W \quad | : 16$$

$$\Leftrightarrow 3 = h_W \text{ bzw. } h_W = 3 \text{ cm}$$

Ergebnis: Das Wasser steht in dem quadratischen Prisma **3 cm hoch**.



Figur 4



Lösungen zur Prüfung 2022: Pflichtteil A1

Aufgabe 3:

a) Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „zweimal weiß“:

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei *einmaligem* Drehen das weiße Feld erscheint, ist $P_W = \frac{1}{4}$.

Mit der Produktregel (Pfadregel) folgt dann für das Ereignis „zweimal weiß“:

$$P(\text{zweimal weiß}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, dass zweimal weiß erscheint, ist $P(\text{zweimal weiß}) = \frac{1}{16}$.

b) Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „grau und schwarz“:

Zu dem Ereignis „grau und schwarz“ gehören die beiden Ergebnisse (grau; schwarz) und (schwarz; grau).

Hinweis: Die Bezeichnung „(grau; schwarz)“ bedeutet: Zuerst erscheint ein graues Feld, anschließend erscheint beim zweiten Drehen das schwarze Feld. Entsprechend umgekehrt bei „(schwarz; grau)“.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einmaligem Drehen ein graues Feld erscheint, ist $P_g = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einmaligem Drehen das schwarze Feld erscheint, ist $P_s = \frac{1}{4}$.

Mit der Produktregel (Pfadregel) folgt dann:

$$P(\text{grau; schwarz}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad P(\text{schwarz; grau}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Mit der Summenregel erhält man:

$$P(\text{grau und schwarz}) = P(\text{grau; schwarz}) + P(\text{schwarz; grau}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „grau und schwarz“ ist $P(\text{grau und schwarz}) = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 4:

Welcher Boxplot gehört zu der Rangliste ?

Die drei Boxplots unterscheiden sich nur im Zentralwert z oder im oberen Quartil q_o .

Der **Zentralwert z** der Rangliste befindet sich wegen $\frac{1}{2} \cdot 13 = 6,5$ am 7. Platz der Rangliste.

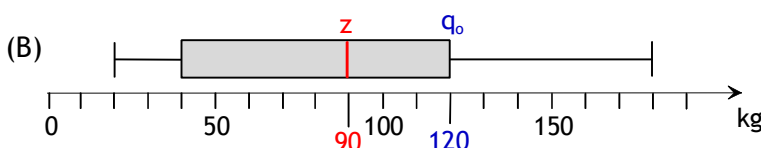
Das ist der Wert **$z = 90$ kg**.

Das **obere Quartil q_o** befindet sich wegen $\frac{3}{4} \cdot 13 = 9,75$ am 10. Platz der Rangliste.

Das ist der Wert **$q_o = 120$ kg**.

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Gewicht (in kg)	20	30	30	40	50	80	90	100	110	120	150	160	180

Die Kennwerte $z = 90$ kg und $q_o = 120$ kg stimmen mit dem **Boxplot (B)** überein.



Ergebnis: Zu der abgebildeten Rangliste gehört der **Boxplot (B)**.

Lösungen zur Prüfung 2022: Pflichtteil A1



Aufgabe 5:

Berechnung des Terms:

Variante 1:

$$58 \cdot 10^4 + 42 \cdot 10^4 = 58 \cdot 10\,000 + 42 \cdot 10\,000 = 580\,000 + 420\,000 = 1\,000\,000 = \mathbf{1 \text{ Million}}$$

Hinweis: $10^4 = 10\,000$.

Variante 2:

$$58 \cdot 10^4 + 42 \cdot 10^4 = 10^4 \cdot (58 + 42) = 10^4 \cdot 100 = 10^4 \cdot 10^2 = 10^6 = \mathbf{1 \text{ Million}}$$

Hinweise:

Zunächst wurde 10^4 ausgeklammert. Das Ergebnis des Klammerterms $(58 + 42) = 100$ wurde dann in die Potenz 10^2 umgewandelt. Mit dem ersten Potenzgesetz kann man $10^4 \cdot 10^2$ schließlich zum Ergebnis $10^6 = 1$ Million zusammenfassen.

Aufgabe 6:

a) Die Anzahl der Kärtchen für das 7. Muster:

Variante 1:

Das Muster zur Nummer n besteht aus n waagrechten Reihen. Von oben nach unten betrachtet hat dabei jede Reihe 2 Kärtchen mehr als die jeweils darüberliegende Reihe. Nach dieser Regel erhält man für die Anzahl der Kärtchen:

Muster (1.): 1 Kärtchen

Muster (2.): $1 + 3 = 4$ Kärtchen

Muster (3.): $1 + 3 + 5 = 9$ Kärtchen

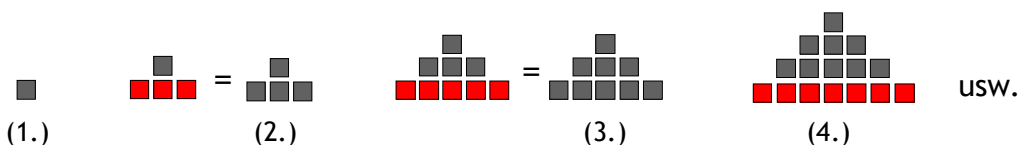
Für das 7. Muster erhält man: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 9 + 27 + 13 = 9 + 40 = 49$ Kärtchen

Ergebnis: Das 7. Muster besteht aus **49** Kärtchen.

Variante 2:

Man kann die Muster aber auch so entwickeln, dass man einem Muster eine untere Reihe an Kärtchen anfügt, um das nächste Muster zu erhalten. Dabei muss die neue untere Reihe aus so vielen Kärtchen bestehen, dass das neue Muster wieder eine Dreiecksform hat.

Die untere Reihe eines Musters hat also immer zwei Kärtchen mehr als die untere Reihe des vorherigen Musters:



Mit dieser Regel kann man die Anzahl der Kärtchen schrittweise so berechnen:

Muster (2.): 1 Kärtchen + 3 Kärtchen = 4 Kärtchen

Muster (3.): 4 Kärtchen + 5 Kärtchen = 9 Kärtchen

Muster (4.): 9 Kärtchen + 7 Kärtchen = 16 Kärtchen

Muster (5.): 16 Kärtchen + 9 Kärtchen = 25 Kärtchen

Muster (6.): 25 Kärtchen + 11 Kärtchen = 36 Kärtchen

Muster (7.): 36 Kärtchen + 13 Kärtchen = 49 Kärtchen

Lösungen zur Prüfung 2022: Pflichtteil A1



b) Die richtige Formel:

Um die richtige Formel herauszufinden, muss man die Probe mit einem bestimmten Wertepaar (n ; s) machen. Zum Beispiel ist für $n = 7$ die Anzahl der Kärtchen $s = 49$.

Einsetzen von $s = 49$ und $n = 7$ in die Formel $s = 3n - 2$ ergibt: $49 = 3 \cdot 7 - 2 = 19$; falsche Aussage

Einsetzen von $s = 49$ und $n = 7$ in die Formel $s = n^2$ ergibt: $49 = 7^2 = 49$; wahre Aussage

Einsetzen von $s = 49$ und $n = 7$ in die Formel $s = n^2 + n - 2$ ergibt: $49 = 7^2 + 7 - 2 = 54$; falsche Aussage

Die richtige Formel ist also $s = n^2$.

Ergebnis: Emma sollte die Formel $s = n^2$ wählen.

Hinweis: Man kann die Formel auch mit anderen Wertepaaren wie $n = 2$; $s = 4$ oder $n = 3$; $s = 9$ oder $n = 4$; $s = 16$ bestätigen.

Aufgabe 7:

Überprüfen von Liams Behauptung:

Rechnerische Begründung:

Der Preis der Sportschuhe nach zweimaliger Preissenkung kann mit der Formel $G_- = G \cdot q_1 \cdot q_2$ für einen verringerten Grundwert berechnet werden. Darin ist G der Grundwert $G = 120$ € und G_- der verringerte Grundwert; also hier der reduzierte Preis.

Die Veränderungsfaktoren q_1 und q_2 erhält man aus den beiden Prozentsätzen 30 % und 20 % und der

Formel $q_- = 1 - \frac{p}{100}$. Es gilt: $q_1 = 1 - \frac{30}{100} = 0,70$ und $q_2 = 1 - \frac{20}{100} = 0,80$

Einsetzen von $G = 120$ €, $q_1 = 0,70$ und $q_2 = 0,80$ in die Formel $G_- = G \cdot q_1 \cdot q_2$ ergibt:

$$G_- = 120 \text{ €} \cdot 0,70 \cdot 0,80 = 120 \text{ €} \cdot 0,56$$

Wie man bereits an der Gleichung $G_- = 120 \text{ €} \cdot 0,56$ erkennt, hat Liam nicht recht, weil

$$120 \text{ €} \cdot 0,56 \neq 120 \text{ €} \cdot 0,50 \text{ ist.}$$

Hinweise:

1.) Die Hälfte des ursprünglichen Preises ist $120 \text{ €} \cdot 0,50 = 60 \text{ €}$.

2.) Es ist: $0,70 \cdot 0,80 = \frac{7}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{56}{100} = 0,56$

3.) Den genauen Wert von $120 \text{ €} \cdot 0,56$ braucht man nicht unbedingt ausrechnen. Man würde erhalten: $G_- = 67,20 \text{ €}$

4.) Tipp zur Berechnung: $120 \cdot 0,56 = 120 \cdot 0,50 + 120 \cdot 0,06 = 60 + 1,2 \cdot 6 = 60 + 7,2 = 67,20 \text{ €}$

Ergebnis: Liam hat nicht recht, weil der reduzierte Preis $120 \text{ €} \cdot 0,56 = 67,20 \text{ €}$ ist und damit größer ist als $120 \text{ €} \cdot 0,50 = 60 \text{ €}$.

Begründung durch Argumentation:

Wenn der reduzierte Preis 50 % des ursprünglichen Preises $G = 120$ € betragen soll, muss man von $G = 120$ € insgesamt 50 % abziehen. Bei der zweiten Preissenkung beziehen sich die 20 % aber nicht auf $G = 120$ €, sondern auf den bereits reduzierten Preis. Somit fällt die gesamte Preissenkung etwas kleiner als 50 % aus und Liam hat nicht recht.

Lösungen zur Prüfung 2022: Pflichtteil A2



Aufgabe 1:

Lösungsübersicht:

Zunächst sollte man im gleichschenkligen Dreieck DBC die Höhe h bezüglich der Seite $\overline{CD}$ einzeichnen (siehe Figur 2) und den Winkel β aus der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC berechnen (s. Figur 1). Außerdem sollte man für die weiteren Berechnungen beachten, dass die Höhe h zur Grundseite $\overline{CD}$ den Winkel β halbiert (siehe Figur 3).

Für den Umfang u des Dreiecks ADC gilt: $u = \overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AC}$, und mit $\overline{AC} = 9,5$ cm:

$$u = \overline{AD} + \overline{CD} + 9,5$$

- Für die Strecke $\overline{AD}$ gilt: $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD}$. Die Strecke $\overline{AB}$ kann man im Dreieck ABC mit der Kosinusfunktion berechnen (siehe Figur 1). Die Strecke $\overline{BD}$ erhält man mit der Beziehung $\overline{BD} = \overline{BC}$, wobei man $\overline{BC}$ im Dreieck ABC mit der Tangensfunktion berechnen kann (siehe Figur 1).
- Die Strecke $\overline{CD}$ ist die Grundseite des gleichschenkligen Dreiecks DBC und wird von der Höhe h halbiert (siehe Figur 2). Es gilt also: $\overline{CD} = 2\overline{CM}$. Die Strecke $\overline{CM}$ kann im Dreieck BCM mit der Sinusfunktion berechnet werden, da man die Strecke $\overline{BC}$ bereits berechnet hat und der Winkel $\sphericalangle CBM = 0,5\beta$ ist (siehe Figur 3).

Der Umfang des Dreiecks ADC:

Für den Umfang u des Dreiecks ADC gilt (siehe Figur 1): $u = \overline{AD} + \overline{CD} + 9,5$

→ Berechnung der Strecke $\overline{AD}$:

Für die Strecke $\overline{AD}$ gilt (siehe Figur 1): $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD}$

- Die Strecke $\overline{AB}$ kann im Dreieck ABC mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1). Darin gilt:

$$\cos 40^\circ = \frac{9,5}{\overline{AB}} \quad | \cdot \overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \cos 40^\circ = 9,5 \quad | : \cos 40^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 12,40 \text{ cm}$$

- Für die Strecke $\overline{BD}$ gilt laut Aufgabenstellung $\overline{BD} = \overline{BC}$.

Die Strecke $\overline{BC}$ kann im Dreieck ABC mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 1). Darin gilt:

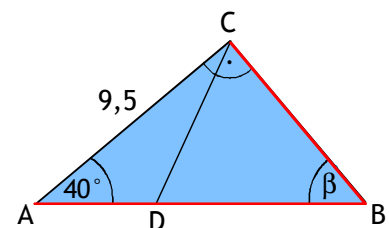
$$\tan 40^\circ = \frac{\overline{BC}}{9,5} \quad | \cdot 9,5$$

$$\Leftrightarrow 7,97 = \overline{BC} \text{ bzw. } \overline{BC} = 7,97 \text{ cm}$$

Wegen $\overline{BD} = \overline{BC}$ folgt damit: $\overline{BD} = 7,97 \text{ cm}$

Mit $\overline{AB} = 12,40 \text{ cm}$ und $\overline{BD} = 7,97 \text{ cm}$ erhält man für $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD}$:

$$\overline{AD} = 12,40 \text{ cm} - 7,97 \text{ cm} = \underline{4,43 \text{ cm}}$$



Figur 1

Das Dreieck DBC ist gleichschenkelig mit $\overline{BD} = \overline{BC}$.

Lösungen zur Prüfung 2022: Pflichtteil A2



→ Berechnung der Strecke $\overline{CD}$:

Weil die Höhe h im gleichschenkligen Dreieck DBC die Grundseite $\overline{CD}$ halbiert, gilt (siehe Figur 2): $\overline{CD} = 2 \overline{CM}$

Die Strecke $\overline{CM}$ kann man im markierten Dreieck der Figur 3 mit der Sinusfunktion berechnen, wenn man den Winkel β kennt, der ebenfalls von der Höhe h halbiert wird.

Für die Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC gilt (siehe Figur 2):

$$40^\circ + 90^\circ + \beta = 180^\circ \Leftrightarrow 130^\circ + \beta = 180^\circ \Leftrightarrow \beta = 50^\circ$$

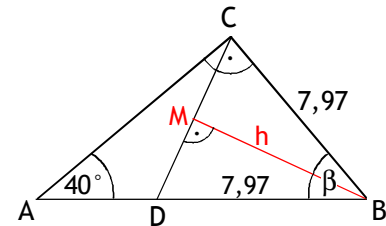
Im markierten Dreieck der Figur 3 gilt dann:

$$\sin 25^\circ = \frac{\overline{CM}}{7,97} \quad | \cdot 7,97$$

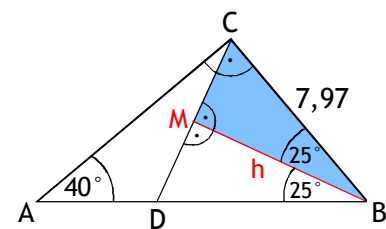
$$\Leftrightarrow 3,37 = \overline{CM} \quad \text{bzw.} \quad \overline{CM} = 3,37 \text{ cm}$$

Somit folgt für $\overline{CD} = 2 \overline{CM}$:

$$\overline{CD} = \underline{6,74 \text{ cm}}$$



Figur 2



Figur 3

Einsetzen von $\overline{AD} = 4,43 \text{ cm}$ und $\overline{CD} = 6,74 \text{ cm}$ in $u = \overline{AD} + \overline{CD} + 9,5$ ergibt schließlich: $u = \underline{20,67 \text{ cm}}$

Ergebnis: Der Umfang des Dreiecks ADC beträgt $u = \underline{20,67 \text{ cm}}$.

Aufgabe 2:

Die Anzahl der Pyramiden, die mit dem Wachs gegossen werden können:

Die Anzahl der Pyramiden, die mit dem Wachs gegossen werden können, ist der Quotient aus dem Volumen V_W der 1000 Wachskugeln und dem Volumen V_P der quadratischen Pyramide (= Gussform).

→ Berechnung des Wachsvolumens:

Einsetzen des Kugelradius' $r = 1,5 \text{ cm}$ in die Formel $V_K = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$ ergibt das Volumen einer

Wachskugel: $V_K = 14,137 \text{ cm}^3$

1000 Wachskugeln haben somit das Volumen $V_W = 1000 \cdot 14,137 \text{ cm}^3 = \underline{14137 \text{ cm}^3}$

→ Berechnung des Pyramidenvolumens:

Für das Volumen einer quadratischen Pyramide gilt: $V_P = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$;

mit der Grundkante a und der Pyramidenhöhe h .

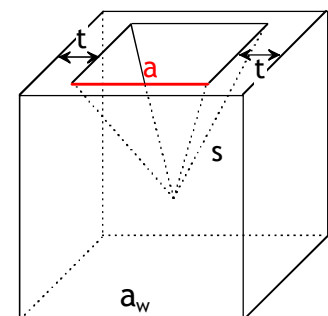
• Berechnung der Grundkante a :

Für die Grundkante a gilt (siehe Figur 1): $a + 2t = a_W$

Einsetzen von $t = 1 \text{ cm}$ und $a_W = 10,0 \text{ cm}$ ergibt:

$$a + 2,0 \text{ cm} = 10,0 \text{ cm} \quad | - 2,0 \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow \underline{a = 8,0 \text{ cm}}$$



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2022: Pflichtteil A2



• Berechnung der Pyramidenhöhe h:

Die Pyramidenhöhe h kann im markierten Dreieck der Figur 2 mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Diagonale d der quadratischen Grundfläche kennt.

Hinweis: Zur besseren Übersicht wurde die Pyramide aus Figur 1 in Figur 2 auf die Grundfläche gestellt.

Darin gilt: $s^2 = h^2 + (0,5d)^2$

Die Diagonale d kann man mit $a = 8,0$ cm und der Formel $d = a\sqrt{2}$ berechnen (siehe Formelsammlung). Man erhält:

$d = 11,31$ cm

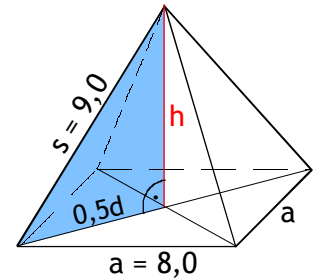
Einsetzen von $s = 9,0$ cm und $d = 11,31$ cm in die Gleichung $s^2 = h^2 + (0,5d)^2$ ergibt:

$$81 = h^2 + 5,655^2$$

$$\Leftrightarrow 81 = h^2 + 31,98 \quad | -31,98$$

$$\Leftrightarrow 49,02 = h^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow 7,00 = h \text{ bzw. } \underline{h = 7,00 \text{ cm}}$$



Figur 2

Einsetzen von $a = 8,0$ cm und $h = 7,00$ cm in $V_P = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$ ergibt schließlich das Pyramidenvolumen:

$$V_P = 149,3 \text{ cm}^3$$

Die Anzahl der Pyramiden, die mit dem Wachs gegossen werden können, kann mit dem Quotient aus Wachsvolumen V_W und Pyramidenvolumen V_P berechnet werden.

Mit $V_W = 14137 \text{ cm}^3$ und $V_P = 149,3 \text{ cm}^3$ erhält man: $14137 \text{ cm}^3 : 149,3 \text{ cm}^3 = 94,7$

Es können also **94 Pyramiden** gegossen werden, wobei etwas Wachs übrig bleibt.

Ergebnis: Es können aus dem Wachs **94 Pyramiden** gegossen werden.

Aufgabe 3:

Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & (x + 2)(x - 4) - x = 2[(x - 3)^2] - 12 && | \text{zusätzliche Klammern um die Quadratklammer *} \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 4x + 2x - 8 - x = 2[x^2 - 6x + 9] - 12 && | \text{Ausmultiplizieren der eckigen Klammern.} \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 2x - 8 - x = 2x^2 - 12x + 18 - 12 && | \text{Zusammenfassen beider Seiten.} \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 3x - 8 = 2x^2 - 12x + 6 && | -x^2 + 3x + 8 \\
 \Leftrightarrow & 0 = x^2 - 9x + 14 && | \text{Vertauschen beider Seiten.} \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 9x + 14 = 0
 \end{aligned}$$

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ und $b = -9$; $c = 14$ erhält man:

$$x_1 = 4,5 + \sqrt{4,5^2 - 14} = 4,5 + \sqrt{6,25} = 7 \quad \text{und} \quad x_2 = 4,5 - \sqrt{4,5^2 - 14} = 4,5 - \sqrt{6,25} = 2$$

Ergebnis: Die Lösungen der Gleichung sind $x_1 = 7$ und $x_2 = 2$.

* Hinweis: Man benötigt die zusätzlichen Klammern, weil vor der Quadratklammer ein Faktor (= 2) steht.

Lösungen zur Prüfung 2022: Pflichtteil A2



Aufgabe 4:

Die Funktionsgleichung von p:

Dem Schaubild entnimmt man, dass die Parabel p durch die beiden Punkte A(1|0) und B(7|0) geht. Einsetzen der Koordinaten von A(1|0) und B(7|0) in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ ergibt ein Gleichungssystem, dessen Lösung die Werte für b und c sind:

$$\text{Mit B(7|0): } 0 = 7^2 + b \cdot 7 + c \Leftrightarrow 0 = 49 + 7b + c \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit A(1|0): } 0 = 1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow 0 = 1 + 1b + c \quad (\text{II})$$

$$\begin{aligned} \text{(I) - (II) ergibt: } 0 &= 48 + 6b \quad | -6b \\ \Leftrightarrow -6b &= 48 \quad | :(-6) \\ \Leftrightarrow b &= -8 \end{aligned}$$

Einsetzen von $b = -8$ in die Gleichung (II) $0 = 1 + 1b + c$ ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 1 \cdot (-8) + c \\ \Leftrightarrow 0 &= 1 - 8 + c \\ \Leftrightarrow 0 &= -7 + c \quad | +7 \\ \Leftrightarrow 7 &= c \text{ bzw. } c = 7 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Parabel p lautet: $y = x^2 - 8x + 7$.

Alternative Lösungsmöglichkeit:

Wenn man zwei Nullstellen x_1 und x_2 einer nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabel kennt, kann man die Parabelgleichung mit dem **Nullstellenansatz** $p: y = (x - x_1)(x - x_2)$ sofort hinschreiben. Mit $x_1 = 1$ und $x_2 = 7$ erhält man:

$$y = (x - 1)(x - 7) = x^2 - 7x - 1x + 7 = x^2 - 8x + 7 \quad (\text{siehe oben})$$

Die fehlenden y-Werte der Wertetabelle:

Die fehlenden y-Werte erhält man, indem man die x-Werte jeweils in die Gleichung $y = x^2 - 8x + 7$ einsetzt. Hinweis: Man beachte, dass man negative Zahlen beim Einsetzen einklammern muss.

$$\text{Einsetzen von } x = -3 \text{ in } y = x^2 - 8x + 7 \text{ ergibt: } y = (-3)^2 - 8 \cdot (-3) + 7 = 9 + 24 + 7 = 40$$

$$\text{Einsetzen von } x = -2 \text{ in } y = x^2 - 8x + 7 \text{ ergibt: } y = (-2)^2 - 8 \cdot (-2) + 7 = 4 + 16 + 7 = 27$$

$$\text{Einsetzen von } x = -1 \text{ in } y = x^2 - 8x + 7 \text{ ergibt: } y = (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 7 = 1 + 8 + 7 = 16$$

$$\text{Einsetzen von } x = 0 \text{ in } y = x^2 - 8x + 7 \text{ ergibt: } y = 0^2 - 8 \cdot 0 + 7 = 0 + 0 + 7 = 7$$

Die vollständige Wertetabelle ist also:

x	-3	-2	-1	0
y	40	27	16	7

Berechnung der Schnittpunkte A und B:

Gleichsetzen der Gleichung g: $y = -2x + 2$ mit der Parabelgleichung p: $y = x^2 - 8x + 7$ ergibt:

$$-2x + 2 = x^2 - 8x + 7 \quad | +2x - 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 6x + 5 \quad | \text{Vertauschen beider Seiten}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ und $b = -6$, $c = 5$ erhält man:



Lösungen zur Prüfung 2022: Pflichtteil A2

$$x_1 = 3 + \sqrt{3^2 - 5} = 3 + \sqrt{4} = 5 \quad \text{und} \quad x_2 = 3 - \sqrt{3^2 - 5} = 3 - \sqrt{4} = 1$$

Das sind die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte $A(5|y_A)$ und $B(1|y_B)$.

Die y-Koordinaten erhält man durch Einsetzen von $x_1 = 5$ bzw. $x_2 = 1$ in die Gleichung von g oder in die Gleichung von p.

Einsetzen von $x_1 = 5$ in $y = -2x + 2$ ergibt: $y = -2 \cdot 5 + 2 = -8 \Rightarrow y_A = -8 \Rightarrow A(5|-8)$

Einsetzen von $x_1 = 1$ in $y = -2x + 2$ ergibt: $y = -2 \cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow y_B = 0 \Rightarrow B(1|0)$

Ergebnis: Die Schnittpunkte A und B sind $A(5|-8)$ und $B(1|0)$.

(Hinweis: Die Bezeichnungen „A“ und „B“ können auch vertauscht werden.)

Aufgabe 5:

Das Ziehen von Losen ist ein Ziehen *ohne* Zurücklegen, weil man ein gezogenes Los nicht wieder zurücklegen darf. Insgesamt sind vor dem ersten Zug 100 Lose (= 12 + 8 + 80) in der Lostrommel.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Francesca zwei Nieten zieht:

Die Wahrscheinlichkeit, dass Francesca beim ersten Los eine Niete erwischt, ist $P_1(\text{Niete}) = \frac{80}{100}$.

Beim Ziehen des zweiten Loses sind nur noch 99 Lose und 79 Nieten in der Lostrommel. Somit ist die

Wahrscheinlichkeit, dass Francesca beim zweiten Zug ebenfalls eine Niete zieht: $P_2(\text{Niete}) = \frac{79}{99}$.

Mit der Produktregel (Pfadregel) folgt dann für das Ereignis „zwei Nieten“:

$$P(\text{zwei Nieten}) = \frac{80}{100} \cdot \frac{79}{99} = \frac{316}{495} = 0,638 = \mathbf{63,8\%}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, dass Francesca zwei Nieten zieht, ist $P(\text{zwei Nieten}) = 63,8\%$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Francesca einen Fußball und einen Basketball gewinnt:

Zu dem Ereignis „ein Fußball und ein Basketball“ gehören die beiden Ergebnisse (Fußball; Basketball) und (Basketball; Fußball).

Hinweis: Die Bezeichnung „(Fußball; Basketball)“ bedeutet: Francesca gewinnt mit dem ersten Los einen Fußball und mit dem zweiten Los einen Basketball. Entsprechend umgekehrt bei „(Basketball; Fußball)“.

• Die Wahrscheinlichkeit, mit dem ersten Los einen Fußball zu gewinnen, ist $P_1(\text{Fußball}) = \frac{12}{100}$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit dem zweiten Los einen Basketball zu gewinnen, ist $P_2(\text{Basketball}) = \frac{8}{99}$.

Mit der Produktregel (Pfadregel) folgt dann: $P(\text{Fußball; Basketball}) = \frac{12}{100} \cdot \frac{8}{99} = \frac{8}{825} = \mathbf{0,97\%}$

• Die Wahrscheinlichkeit, mit dem ersten Los einen Basketball zu gewinnen, ist $P_1(\text{Basketball}) = \frac{8}{100}$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit dem zweiten Los einen Fußball zu gewinnen, ist $P_2(\text{Fußball}) = \frac{12}{99}$.

Mit der Produktregel (Pfadregel) folgt dann: $P(\text{Basketball; Fußball}) = \frac{8}{100} \cdot \frac{12}{99} = \frac{8}{825} = \mathbf{0,97\%}$

Mit der Summenregel erhält man schließlich:

$$P(\text{Fußball und Basketball}) = P(\text{Fußball; Basketball}) + P(\text{Basketball; Fußball}) = 0,97\% + 0,97\% = \mathbf{1,94\%}$$

Ergebnis:

Die Wahrscheinlichkeit, dass Francesca einen Fußball und einen Basketball gewinnt, ist $1,94\%$.

Lösungen zur Prüfung 2022: Pflichtteil A2



Aufgabe 6:

Prozentuale Zunahme der Paketzustellungen von 2014 bis 2019:

Im Jahr 2014 waren es **2,78 Mrd.** Paketzustellungen. Das ist der Grundwert G .

Im Jahr 2019 waren es **3,65 Mrd.** Paketzustellungen. Das ist der erhöhte Grundwert G_+ .

Einsetzen von $G = 2,78$ Mrd. und $G_+ = 3,65$ Mrd. in die Formel $G_+ = G \cdot q_+$ ergibt:

$$3,65 = 2,78 \cdot q_+ \quad | : 2,78$$

$$\Leftrightarrow 1,313 = q_+ \text{ bzw. } q_+ = 1,313$$

Mit $q_+ = 1 + \frac{p}{100}$ folgt: $p \% = 31,3 \%$

Ergebnis: Die Paketzustellungen haben von 2014 bis 2019 um 31,3 % zugenommen.

Die Anzahl der Pakete, die im Jahr 2019 von DHL zugestellt wurden:

Im Jahr 2019 wurden laut Diagramm insgesamt 3,65 Mrd. Pakete zugestellt. Das ist der Grundwert G .

Mit dem Prozentsatz $p \% = 57,0 \%$ (= Anteil von DHL) und der Formel $W = G \cdot \frac{p}{100}$ erhält man:

$$W = 3,65 \text{ Mrd.} \cdot \frac{57,0}{100} = 2,08 \text{ Mrd. Pakete}$$

Ergebnis: Im Jahr 2019 wurden von DHL 2,08 Mrd. Pakete zugestellt.

Die Werte für 2020 und 2021:

- Die Anzahl der in 2019 zugestellten Pakete ist der Grundwert $G = 3,65$ Mrd. Bei einer Zunahme um $p \% = 9,7 \%$ erhält man für den Wachstumsfaktor $q_+ = 1 + \frac{p}{100}$ im Jahr 2020: $q_+ = 1,097$

Einsetzen von $G = 3,65$ Mrd. und $q_+ = 1,097$ in die Formel $G_+ = G \cdot q_+$ ergibt:

$$G_+ = 3,65 \text{ Mrd.} \cdot 1,097 = 4,0 \text{ Mrd. im Jahr 2020.}$$

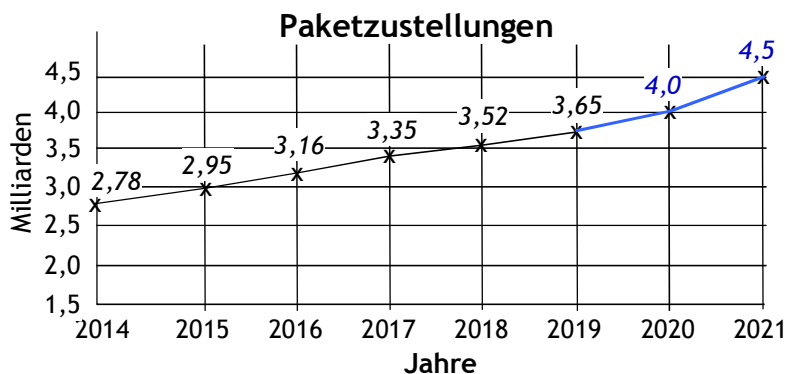
- Um die Anzahl der Paketzustellungen im Jahr 2021 berechnen zu können, muss man den Wert des Jahres 2020 als neuen Grundwert $G_{\text{neu}} = 4,0$ Mrd. betrachten.

Für den Wachstumsfaktor im Jahr 2021 erhält man nun mit $p \% = 12,5 \%$ den Wert: $q_+ = 1,125$

Einsetzen von $G_{\text{neu}} = 4,0$ Mrd. und $q_+ = 1,125$ in die Formel $G_+ = G_{\text{neu}} \cdot q_+$ ergibt:

$$G_+ = 4,0 \text{ Mrd.} \cdot 1,125 = 4,5 \text{ Mrd. im Jahr 2021.}$$

Das ergänzte Diagramm sieht dann so aus:



Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1a:

Lösungsübersicht:

• **Flächeninhalt von AFE:** Zunächst sollte man in den beiden gleichschenkligen Dreiecken ABF und DEF jeweils vom Punkt F aus die Höhe bezüglich der Grundseiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{DE}$ eintragen (siehe Figur 1). Diese beiden Höhen halbieren jeweils die Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$, was für die weitere Berechnung beachtet werden muss. Außerdem sollte man die Hilfslinie $\overline{FG}$ einzeichnen (siehe Figur 2).

Für den Flächeninhalt des Dreiecks AFE gilt: $A_{AFE} = \frac{1}{2} \overline{AE} \cdot h_2$; mit $h_2 = \overline{FM_2} = \overline{AM_1}$ (siehe Figur 1)

Weil die Höhe h_1 die Strecke $\overline{AB} = 14 \text{ cm}$ halbiert, gilt $\overline{AM_1} = 7,0 \text{ cm}$ bzw. $h_2 = 7,0 \text{ cm}$ (siehe Figur 2).

Für die Strecke $\overline{AE}$ gilt: $\overline{AE} = \overline{AD} - \overline{DE}$; mit $\overline{AD} = \overline{AB} = 14 \text{ cm}$, $\overline{DE} = 2\overline{DM_2}$ und $\overline{DM_2} = \overline{FG}$ (siehe Figur 2).

Die Strecke $\overline{FG}$ ist $\overline{FG} = 14,0 \text{ cm} - h_1$ (siehe Figur 2). Die Höhe h_1 kann mit dem Satz des Pythagoras in der linken Hälfte des Dreiecks ABF berechnet werden (siehe Figur 2).

• **Winkel ε :** Für den Winkel ε gilt (siehe Figur 3): $\alpha + \varepsilon + \beta = 90^\circ$. Der Winkel α kann im rechtwinkligen Dreieck EFM_2 mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Den Winkel β erhält man mit der Sinusfunktion im Dreieck AM_1F (siehe Figur 3).

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks AFE:

Für den Flächeninhalt des Dreiecks AFE gilt (siehe Figur 1):

$$A_{AFE} = \frac{1}{2} \overline{AE} \cdot h_2$$

Man beachte dabei, dass die Höhe h_2 außerhalb des Dreiecks liegt, weil AFE stumpfwinklig ist.

• Für die Höhe h_2 gilt: $h_2 = \overline{AM_1}$ (siehe Figur 1). Weil die Höhe h_1 im gleichschenkligen Dreieck ABF die Strecke $\overline{AB} = 14,0 \text{ cm}$ halbiert, gilt: $\overline{AM_1} = 7,0 \text{ cm}$ und damit auch $h_2 = 7,0 \text{ cm}$

• Für die Strecke $\overline{AE}$ gilt (siehe Figur 2): $\overline{AE} = 14,0 \text{ cm} - \overline{DE}$

Aus $\overline{DE} = 2\overline{DM_2}$ und $\overline{DM_2} = \overline{FG}$ folgt: $\overline{DE} = 2\overline{FG}$

Man beachte dabei, dass die Höhe h_2 im gleichschenkligen Dreieck DEF die Strecke $\overline{DE}$ halbiert.

Die Strecke $\overline{FG}$ ist $\overline{FG} = 14,0 \text{ cm} - h_1$ (siehe Figur 2).

Die Höhe h_1 kann mit dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck AM_1F berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 2):

$$h_1^2 + 7,0^2 = 12,0^2$$

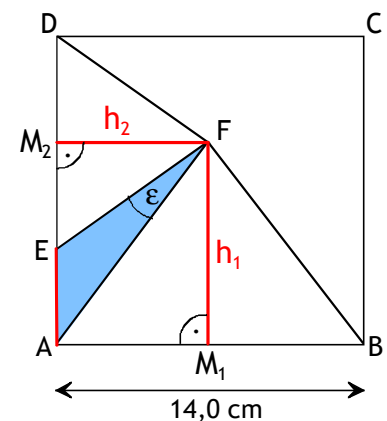
$$\Leftrightarrow h_1^2 + 49 = 144 \quad | -49$$

$$\Leftrightarrow h_1^2 = 95 \quad | \sqrt{}$$

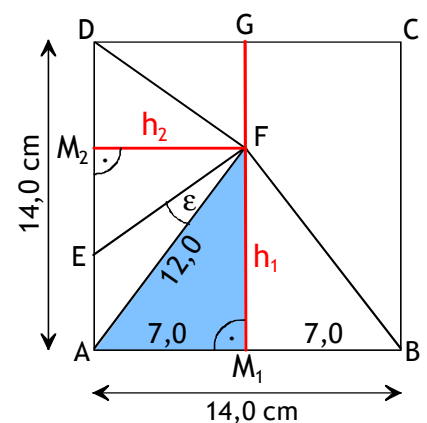
$$\Rightarrow h_1 = 9,75 \text{ cm}$$

Einsetzen in $\overline{FG} = 14,0 \text{ cm} - h_1$ ergibt: $\overline{FG} = 4,25 \text{ cm}$

Mit $\overline{DE} = 2\overline{FG}$ erhält man: $\overline{DE} = 8,5 \text{ cm}$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W1



Einsetzen von $\overline{DE} = 8,5 \text{ cm}$ in $\overline{AE} = 14,0 \text{ cm} - \overline{DE}$ ergibt: $\overline{AE} = 5,5 \text{ cm}$

Mit $h_2 = 7,0 \text{ cm}$ und $\overline{AE} = 5,5 \text{ cm}$ erhält man schließlich für den Flächeninhalt $A_{AFE} = \frac{1}{2} \overline{AE} \cdot h_2$:

$$A_{AFE} = 19,25 \text{ cm}^2$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Dreiecks AFE beträgt $A_{AFE} = 19,25 \text{ cm}^2$.

Berechnung des Winkels ε :

Für den Winkel ε gilt (siehe Figur 3): $\alpha + \varepsilon + \beta = 90^\circ$

- Der Winkel α kann im rechtwinkligen Dreieck EFM_2 mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 3).

Die Strecken $h_2 = 7,0 \text{ cm}$ und $\overline{EM}_2 = \overline{DM}_2 = 4,25 \text{ cm}$ wurden bereits oben berechnet.

Im Dreieck EFM_2 gilt somit:

$$\tan \alpha = \frac{4,25}{7,0} = 0,607 \Rightarrow \underline{\alpha = 31,3^\circ}$$

- Der Winkel β kann im rechtwinkligen Dreieck AM_1F mit der Sinusfunktion berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 3):

$$\sin \beta = \frac{7,0}{12,0} = 0,583 \Rightarrow \underline{\beta = 35,7^\circ}$$

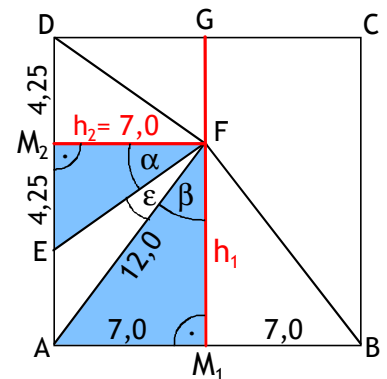
Einsetzen von $\alpha = 31,3^\circ$ und $\beta = 35,7^\circ$ in $\alpha + \varepsilon + \beta = 90^\circ$ ergibt:

$$31,3^\circ + \varepsilon + 35,7^\circ = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow 67,0^\circ + \varepsilon = 90^\circ \quad | -67,0^\circ$$

$$\Leftrightarrow \underline{\varepsilon = 23,0^\circ}$$

Ergebnis: Der Winkel ε beträgt $\varepsilon = 23,0^\circ$.



Figur 3

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1b:

Lösungsübersicht:

- Die Koordinaten der **Schnittpunkte P und Q** berechnet man durch Gleichsetzen der Gleichung von $g: y = x + 2$ mit der Gleichung von $p_1: y = -x^2 + 8$. Die Lösungen dieser Gleichung sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte P und Q. Die y-Koordinaten erhält man durch Einsetzen der x-Koordinaten in eine der Gleichungen von g oder p_1 .
- Um die Koordinaten des **Scheitelpunkts S_2** von p_2 bestimmen zu können, benötigt man zuerst die Gleichung von p_2 . Dazu setzt man die Koordinaten von P und Q jeweils in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ ein und löst das entsprechende Gleichungssystem. Anschließend wandelt man die Gleichung von p_2 mit einer quadratischen Ergänzung in eine Scheitelform um, an der man die Koordinaten des Scheitelpunkts S_2 ablesen kann.
- Zur Überprüfung von **Robins Behauptung** kann man zunächst die drei Seitenlängen des Dreiecks PQS_2 berechnen und anschließend prüfen, ob der Satz des Pythagoras gilt.
Alternativ kann man auch die Steigungen der Geraden durch die drei Seiten des Dreiecks PQS_2 bestimmen und miteinander vergleichen. Wenn zwei dieser Geraden senkrecht aufeinander stehen, muss das Produkt ihrer Steigungen den Wert „-1“ ergeben.

Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte P und Q:

Gleichsetzen der Gleichung $g: y = x + 2$ mit der Parabelgleichung $p_1: y = -x^2 + 8$ ergibt:

$$x + 2 = -x^2 + 8 \quad | +x^2 - 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ und $b = 1$, $c = -6$ erhält man:

$$x_1 = -0,5 + \sqrt{(-0,5)^2 - (-6)} = -0,5 + \sqrt{6,25} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -0,5 - \sqrt{(-0,5)^2 - (-6)} = -0,5 - \sqrt{6,25} = -3$$

Das sind die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte $P(2|y_P)$ und $Q(-3|y_Q)$.

Die y-Koordinaten erhält man durch Einsetzen von $x_1 = 2$ bzw. $x_2 = -3$ in die Gleichung von g oder in die Gleichung von p_1 .

Einsetzen von $x_1 = 2$ in $g: y = x + 2$ ergibt: $y = 2 + 2 = 4 \Rightarrow y_P = 4 \Rightarrow P(2|4)$

Einsetzen von $x_2 = -3$ in $g: y = x + 2$ ergibt: $y = -3 + 2 = -1 \Rightarrow y_Q = -1 \Rightarrow Q(-3|-1)$

Ergebnis: Die Schnittpunkte P und Q haben die Koordinaten $P(2|4)$ und $Q(-3|-1)$.

(Hinweis: Die Punktbezeichnungen „P“ und „Q“ können auch vertauscht werden.)

Die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel p_2 :

Zunächst muss man die Gleichung von p_2 bestimmen. Einsetzen der Koordinaten von $P(2|4)$ und $Q(-3|-1)$ in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ ergibt das folgende Gleichungssystem:

Mit $P(2|4)$: $4 = 2^2 + b \cdot 2 + c \Leftrightarrow 4 = 4 + 2b + c \quad (I)$

Mit $Q(-3|-1)$: $-1 = (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \Leftrightarrow -1 = 9 - 3b + c \quad (II)$

$$(I) - (II) \text{ ergibt: } 5 = -5 + 5b \quad | +5$$

$$\Leftrightarrow 10 = 5b \quad | :5$$

$$\Leftrightarrow 2 = b \text{ bzw. } b = 2$$

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W1



Einsetzen von $b = 2$ in die Gleichung (I) $4 = 4 + 2b + c$ ergibt:

$$\begin{aligned} 4 &= 4 + 2 \cdot 2 + c \\ \Leftrightarrow 4 &= 4 + 4 + c \\ \Leftrightarrow 4 &= 8 + c \quad | -8 \\ \Leftrightarrow -4 &= c \quad \text{bzw. } c = -4 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung der **Parabel** p_2 lautet also: $y = x^2 + 2x - 4$.

Die Koordinaten des Scheitelpunkts S_2 erhält man, indem die Gleichung von p_2 : $y = x^2 + 2x - 4$ mit einer quadratischen Ergänzung in eine Scheitelform umwandelt:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x - 4 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 + 2x + \color{red}{1}^2 - 4 - \color{red}{1}^2 \quad | \text{Anwenden der ersten binomischen Formel} \\ \Leftrightarrow y &= (x + 1)^2 - 4 - 1 \\ \Leftrightarrow y &= (x + 1)^2 - 5 \end{aligned}$$

Dieser Scheitelform entnimmt man: $S_2(-1 | -5)$

Tipp: Die x-Koordinate des Scheitelpunkts ist derjenige Wert x , für den die Quadratklammer $(x + 1)^2$ in der Scheitelform 0 wird. Die y-Koordinate des Scheitelpunkts steht immer direkt hinter der Quadratklammer.

Ergebnis: Der Scheitelpunkt S_2 der Parabel p_2 hat die Koordinaten $S_2(-1 | -5)$.

Überprüfen von Robins Behauptung:

Lösungsmöglichkeit 1:

Man berechnet alle Seitenlängen des Dreiecks PQS_2 und prüft damit, ob der Satz des Pythagoras gilt. Den Abstand d zwischen zwei Punkten $A(x_1 | y_1)$ und $B(x_2 | y_2)$ kann man mit der Formel

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ berechnen (siehe Formelsammlung).}$$

Mit dieser Formel erhält man:

$$\text{Länge zwischen } P(2 | 4) \text{ und } Q(-3 | -1): \quad \overline{PQ} = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$$

$$\text{Länge zwischen } P(2 | 4) \text{ und } S_2(-1 | -5): \quad \overline{PS_2} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-5 - 4)^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$$

$$\text{Länge zwischen } Q(-3 | -1) \text{ und } S_2(-1 | -5): \quad \overline{QS_2} = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (-5 - (-1))^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

Die längste Seite und mögliche Hypotenuse ist $\overline{PS_2} = \sqrt{90}$. Falls das Dreieck PQS_2 rechtwinklig ist, muss der Satz des Pythagoras gelten:

$$\begin{aligned} \sqrt{50}^2 + \sqrt{20}^2 &= \sqrt{90}^2 \\ \Leftrightarrow 50 + 20 &= 90 \end{aligned}$$

Das ist eine **falsche** Aussage, also gilt der Satz des Pythagoras nicht. Somit ist das Dreieck PQS_2 **nicht rechtwinklig**.

Ergebnis: Das Dreieck PQS_2 ist nicht rechtwinklig. Robins **Behauptung ist falsch**.

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W1



Lösungsmöglichkeit 2:

Man berechnet die Steigungen der Geraden, auf denen die drei Dreiecksseiten liegen und vergleicht diese Steigungen miteinander. Wenn für zwei Steigungen m_1 und m_2 die Gleichung $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt, stehen diese beiden Geraden senkrecht aufeinander.

Die Steigung m zwischen zwei Punkten $A(x_1 | y_1)$ und $B(x_2 | y_2)$ kann mit der Formel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ berechnet werden (siehe Formelsammlung). Mit dieser Formel erhält man:

$$\text{Steigung zwischen } P(2 | 4) \text{ und } Q(-3 | -1): m_1 = \frac{-1 - 4}{-3 - 2} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$\text{Steigung zwischen } P(2 | 4) \text{ und } S_2(-1 | -5): m_2 = \frac{-5 - 4}{-1 - 2} = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$\text{Steigung zwischen } Q(-3 | -1) \text{ und } S_2(-1 | -5): m_3 = \frac{-5 - (-1)}{-1 - (-3)} = \frac{-5 + 1}{-1 + 3} = \frac{-4}{2} = -2$$

Man erhält folgende Produkte zwischen den Steigungen:

$$m_1 \cdot m_2 \text{ ist: } 1 \cdot 3 = 3 \neq -1$$

$$m_1 \cdot m_3 \text{ ist: } 1 \cdot (-2) = -2 \neq -1$$

$$m_2 \cdot m_3 \text{ ist: } 3 \cdot (-2) = -6 \neq -1$$

Somit steht kein Paar der drei Dreiecksseiten senkrecht aufeinander.

Ergebnis: Das Dreieck PQS_2 ist nicht rechtwinklig. Robins **Behauptung ist falsch.**

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W2



Aufgabe W2a:

Lösungsübersicht:

- Die **Funktionsgleichung der Parabel p_1** erhält man, indem man die Koordinaten der Punkte $T(-2|5)$ und $R(4|5)$ in die Gleichung $y = x^2 + bx + c$ einsetzt und das resultierende Gleichungssystem nach b und c löst. Die **Funktionsgleichung der Parabel p_2** hat die allgemeine Form $y = ax^2 + c^*$. Den Wert von c^* kann man direkt im Schaubild ablesen. Den Wert von a bestimmt man, indem man anschließend die Koordinaten von $T(-2|5)$ in die Gleichung $y = ax^2 + c^*$ einsetzt.
- Um die **Gleichung der Geraden g** berechnen zu können, benötigt man zuerst noch die Koordinaten des Scheitelpunkts S_1 , durch den die Gerade g verlaufen soll. Die Koordinaten von S_1 kann man der Scheitelform von p_1 entnehmen, die man mit einer quadratischen Ergänzung der Gleichung von p_1 erhält. Anschließend setzt man die Koordinaten von S_1 und S_2 in die allgemeine Form $g: y = m \cdot x + c_g$ ein. Die Lösung des resultierenden Gleichungssystems sind die Werte von m und c_g .
- **Funktionsgleichung der Geraden h :** Die Steigung m_h der Geraden h erhält man mit der Steigung m_g der Geraden g und der Beziehung $m_g \cdot m_h = -1$, da die Geraden g und h senkrecht aufeinander stehen sollen. Den Wert von c_h in $y = m_h \cdot x + c_h$ erhält man dann, indem man anschließend die Koordinaten von $R(4|5)$ in $h: y = m_h \cdot x + c_h$ einsetzt.
- **Funktionsgleichung einer Parabel p_3 :** Wenn die Parabeln p_3 und p_1 keinen gemeinsamen Punkt haben sollen, muss der Scheitelpunkt der gesuchten Parabel p_3 auf der Symmetrieachse von p_1 liegen. Das heißt, die Parabel p_3 muss gegenüber der Parabel p_1 parallel zur y -Achse verschoben sein. Gleichzeitig muss p_3 so weit nach oben verschoben sein, dass sie auch mit der Parabel p_2 keinen Punkt gemeinsam hat. Wie weit die Parabel p_3 gegenüber der Parabel p_1 nach oben verschoben sein muss, kann man sich anhand des Schaubilds klarmachen (siehe Figur 2).

Die Funktionsgleichungen der Parabeln p_1 und p_2 :

• Funktionsgleichung der Parabel p_1 :

Dem Schaubild entnimmt man, dass die Parabel p_1 durch die beiden Punkte $R(4|5)$ und $T(-2|5)$ geht. Einsetzen der Koordinaten von $R(4|5)$ und $T(-2|5)$ in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$\text{Mit } R(4|5): \quad 5 = 4^2 + b \cdot 4 + c \quad \Leftrightarrow \quad 5 = 16 + 4b + c \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit } T(-2|5): \quad 5 = (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \quad \Leftrightarrow \quad 5 = 4 - 2b + c \quad (\text{II})$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} - \text{(II)} \text{ ergibt: } 0 &= 12 + 6b \quad | -6b \\ &\Leftrightarrow -6b = 12 \quad | :(-6) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{b = -2} \end{aligned}$$

Einsetzen von $b = -2$ in die Gleichung (I) $5 = 16 + 4b + c$ ergibt:

$$\begin{aligned} 5 &= 16 + 4 \cdot (-2) + c \\ &\Leftrightarrow 5 = 16 - 8 + c \\ &\Leftrightarrow 5 = 8 + c \quad | -8 \\ &\Leftrightarrow -3 = c \text{ bzw. } \mathbf{c = -3} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Parabel p_1 lautet also: $y = x^2 - 2x - 3$.

Alternative Lösungsmöglichkeit:

Wenn man zwei Nullstellen x_1 und x_2 einer nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabel kennt, kann man die Parabelgleichung mit dem **Nullstellenansatz $p: y = (x - x_1)(x - x_2)$** sofort hinschreiben. Mit den Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ der Parabel p_1 (siehe Schaubild) erhält man:

$$y = (x - (-1)) \cdot (x - 3) = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + 1x - 3 = x^2 - 2x - 3 \quad (\text{siehe oben})$$

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W2



• Funktionsgleichung der Parabel p_2 :

Die Funktionsgleichung der Parabel p_2 hat die allgemeine Form $y = ax^2 + c^*$. Den Wert von c^* kann man direkt im Schaubild ablesen: $c^* = 6$. Die unvollständige Gleichung lautet also: $y = ax^2 + 6$

Einsetzen der Koordinaten von $T(-2|5)$ in die Gleichung $y = ax^2 + 6$ ergibt:

$$5 = a \cdot (-2)^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow 5 = 4a + 6 \quad | -6$$

$$\Leftrightarrow -1 = 4a \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} = a \text{ bzw. } a = -\frac{1}{4}$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Parabel p_2 lautet: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6$.

Die Funktionsgleichung der Geraden g:

Zunächst muss man die Koordinaten des Scheitelpunkts S_1 bestimmen, durch den die Gerade g verlaufen soll. Die Koordinaten des anderen Punkts $S_2(0|6)$ sind bereits bekannt.

→ Die Koordinaten von S_1 :

Die Koordinaten von S_1 kann man der Scheitelform der Parabel p_1 entnehmen. Mit einer quadratischen Ergänzung von $y = x^2 - 2x - 3$ erhält man:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 2x + 1^2 - 3 - 1^2 \quad | \text{Anwenden der zweiten binomischen Formel}$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 1)^2 - 3 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 1)^2 - 4$$

Dieser Scheitelform entnimmt man: $S_1(1|-4)$

Einsetzen der Koordinaten von $S_1(1|-4)$ und $S_2(0|6)$ in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c_g$ ergibt das folgende Gleichungssystem:

Mit $S_1(1|-4)$: $-4 = m \cdot 1 + c_g \Leftrightarrow -4 = 1m + c_g \quad (I)$

Mit $S_2(0|6)$: $6 = m \cdot 0 + c_g \Leftrightarrow 6 = c_g \quad (II)$

Einsetzen von $c_g = 6$ in Gleichung (I) $-4 = 1m + c_g$ ergibt:

$$-4 = m + 6 \quad | -6$$

$$\Leftrightarrow -10 = m \text{ bzw. } m = -10$$

Ergebnis: Die Gerade g hat die Funktionsgleichung $y = -10x + 6$.

Die Funktionsgleichung der Geraden h:

Da die Gerade h laut Aufgabenstellung senkrecht zur Geraden g : $y = -10x + 6$ stehen soll, muss für die Steigung m_h der Geraden h gelten (siehe Formelsammlung): $m_h \cdot m_g = -1$

Mit $m_g = -10$ erhält man: $m_h \cdot (-10) = -1 \Leftrightarrow m_h = \frac{1}{10}$

Damit lautet die unvollständige Gleichung der Geraden h : $y = \frac{1}{10}x + c_h$

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W2



Da der Punkt $R(4|5)$ auf der Geraden h liegen soll, kann man c_h durch Einsetzen der Koordinaten von

$R(4|5)$ in $y = \frac{1}{10}x + c_h$ berechnen:

$$5 = \frac{1}{10} \cdot 4 + c_h$$

$$\Leftrightarrow 5 = 0,4 + c_h \quad | -0,4$$

$$\Leftrightarrow 4,6 = c_h \quad \text{bzw.} \quad c_h = 4,6$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Geraden h lautet: $y = \frac{1}{10}x + 4,6$.

Die Funktionsgleichung einer Parabel p_3 , die mit p_1 und p_2 keine Punkte gemeinsam hat:

Der Scheitelpunkt der gesuchten Parabel p_3 muss auf der Symmetrieachse von p_1 liegen, wenn die Parabel p_3 keinen Punkt mit der Parabel p_1 gemeinsam haben soll (siehe Figur 1). Das heißt, die Parabel p_3 muss gegenüber der Parabel p_1 parallel zur y -Achse verschoben sein.

Der Scheitelpunkt S_3 der Parabel p_3 muss somit die gleiche x -Koordinate haben wie der Scheitelpunkt $S_1(1|-4)$. Es ist also $S_3(1|y)$.

Die y -Koordinate von $S_3(1|y)$ muss man nun so wählen, dass p_3 auch mit der Parabel p_2 keinen Punkt gemeinsam hat. Wie man dem Schaubild entnehmen kann, ist man mit $y = 7$ auf der „sicheren Seite“ (siehe Figur 2).

Der Scheitelpunkt einer möglichen Parabel p_3 hat also die Koordinaten $S_3(1|7)$.

Einsetzen der Koordinaten von $S_3(1|7)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ ergibt eine mögliche Gleichung für die gesuchte Parabel p_3 : $y = (x - 1)^2 + 7$

Und ausmultipliziert:

$$p_3: y = (x - 1)^2 + 7 = x^2 - 2x + 1 + 7 = x^2 - 2x + 8$$

Ergebnis:

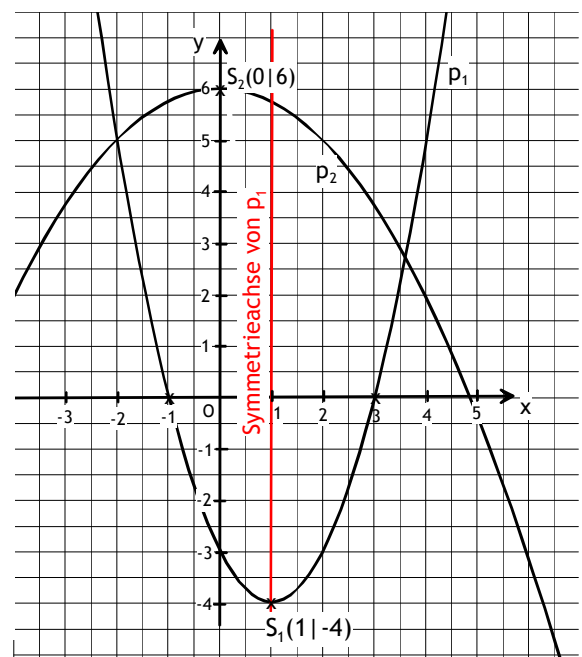
Eine mögliche Funktionsgleichung für die gesuchte Parabel p_3 ist $y = (x - 1)^2 + 7$ bzw. $y = x^2 - 2x + 8$.

Hinweise:

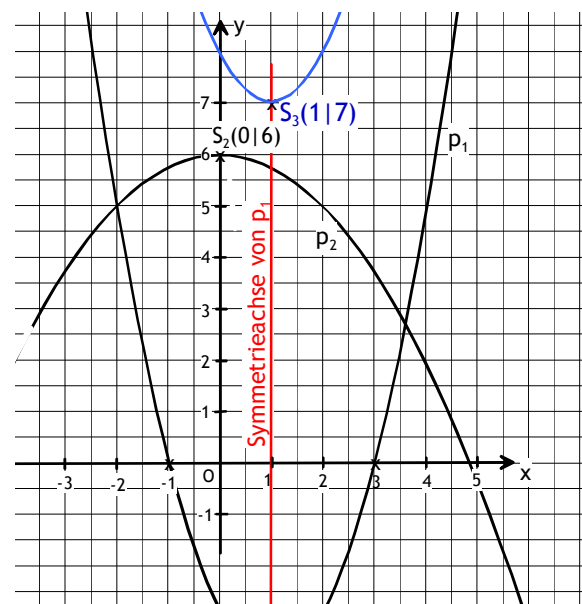
1.) Da die Parabel p_3 mit $S_3(1|7)$ um **11 LE** gegenüber der Parabel p_1 mit $S_1(1|-4)$ nach oben verschoben ist, kann man die Gleichung von p_3 auch ganz einfach aus der Gleichung von p_1 : $y = x^2 - 2x - 3$ durch **Addition von 11** bestimmen.

Man erhält $p_3: y = x^2 - 2x - 3 + 11 = x^2 - 2x + 8$.

2.) Alle möglichen Lösungen für die gesuchte Parabel p_3 haben die Gleichung $p_3: y = (x - 1)^2 + k$; mit $k > 5,8$.



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W2



Aufgabe W2b:

Lösungsübersicht:

Die **Oberfläche des zusammengesetzten Körpers** besteht aus der Grundfläche G des Prismas, dem Mantel M_{Pr} des Prismas und dem Mantel M_{Pyr} der fünfseitigen Pyramide.

Die **Grundfläche G** wiederum besteht aus 5 gleichschenkligen Dreiecken, deren Flächeninhalt mit der Seite a und der Höhe h_a berechnet werden kann. Es gilt (siehe Figur 1): $G = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_a$.

Die Seite a kann mit der Sinusfunktion und der Länge r des Schenkels in einem der 5 gleichschenkligen Dreiecke berechnet werden (siehe Figur 2). Die Länge r kann im markierten Dreieck der Figur 3 mit der Sinusfunktion, dem Winkel $\varepsilon = 33,0^\circ$ und $s = 12,6$ cm bestimmt werden (siehe Figur 3). Die Höhe h_a kann dann mit der Kosinusfunktion oder mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (s. Figur 2 und 4). Man beachte, dass die Höhe h_a die Seite a und den Winkel bei M halbiert (s. Figur 2).

Der **Mantel des Prismas** besteht aus 5 gleich großen Rechtecken mit der Seite $h_2 = 5,6$ cm und der Seite a , die bereits bei der Berechnung der Grundfläche G berechnet wurde. Es gilt: $M_{Pr} = 5 h_2 \cdot a$.

Der **Mantel der Pyramide** besteht aus 5 gleichschenkligen Dreiecken mit der Grundseite a und der Höhe h_s . Es gilt: $M_{Pyr} = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s$. Die Höhe h_s kann aus a und $s = 12,6$ cm mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 6).

Der Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers:

Für den Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers gilt:

$$O = G + M_{Pr} + M_{Pyr}$$

→ Berechnung der Grundfläche G :

$$\text{Es gilt (siehe Figur 1): } G = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

- Die Seite a kann im markierten Dreieck der Figur 2 mit der Sinusfunktion berechnet werden, wenn man die Länge des Schenkels r kennt. Man beachte dabei, dass die Höhe h_a die Grundseite a und den Winkel bei M halbiert (siehe Figur 2). Dieser Winkel ist in einem regelmäßigen Fünfeck $360^\circ : 5 = 72^\circ$.

$$\text{Es gilt (siehe Figur 2): } \sin 36^\circ = \frac{0,5a}{r}$$

Die Länge von r kann mit der Sinusfunktion im markierten Dreieck der Figur 3 berechnet werden.

Darin gilt mit $\varepsilon = 33,0^\circ$ und $s = 12,6$ cm:

$$\sin 33,0^\circ = \frac{r}{12,6} \quad | \cdot 12,6$$

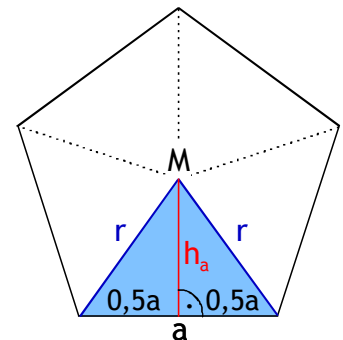
$$\Leftrightarrow 6,86 = r \text{ bzw. } \underline{r = 6,86 \text{ cm}}$$

Einsetzen von $r = 6,86$ cm in $\sin 36^\circ = \frac{0,5a}{r}$ ergibt:

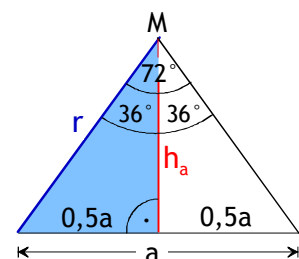
$$\sin 36^\circ = \frac{0,5a}{6,86} \quad | \cdot 6,86$$

$$\Leftrightarrow 4,03 = 0,5a \quad | : 0,5$$

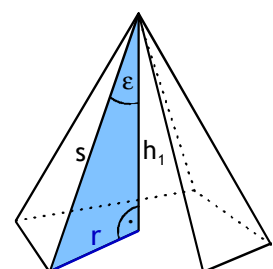
$$\Leftrightarrow 8,06 = a \text{ bzw. } \underline{a = 8,06 \text{ cm}}$$



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W2



- Die Höhe h_a kann im markierten Dreieck der Figur 4 mit der Kosinusfunktion berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 4):

$$\cos 36^\circ = \frac{h_a}{r} \quad \text{Mit } r = 6,86 \text{ cm folgt:}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{h_a}{6,86} \quad | \cdot 6,86$$

$$\Leftrightarrow 5,55 = h_a \text{ bzw. } \underline{h_a = 5,55 \text{ cm}}$$

$$\text{Mit } a = 8,06 \text{ cm und } h_a = 5,55 \text{ cm erhält man für } G = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_a:$$

$$\underline{G = 111,83 \text{ cm}^2}$$

→ Berechnung der Mantelfläche des Prismas:

Für die Mantelfläche des Prismas gilt (siehe Figur 5):

$$M_{Pr} = 5 h_2 \cdot a$$

Mit $a = 8,06 \text{ cm}$ und $h_2 = 5,6 \text{ cm}$ erhält man:

$$\underline{M_{Pr} = 225,68 \text{ cm}^2}$$

→ Berechnung der Mantelfläche der Pyramide:

Für die Mantelfläche der Pyramide gilt (siehe Figur 6):

$$M_{Pyr} = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s$$

Die Seite a wurde bereits oben berechnet: $a = 8,06 \text{ cm}$

Die Höhe h_s kann mit dem Satz des Pythagoras in dem markierten Dreieck der Figur 6 berechnet werden. Darin gilt:

$$s^2 = (0,5a)^2 + h_s^2$$

Mit $s = 12,6 \text{ cm}$ und $a = 8,06 \text{ cm}$ erhält man:

$$158,76 = 16,24 + h_s^2 \quad | -16,24$$

$$\Leftrightarrow 142,52 = h_s^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow 11,94 = h_s \text{ bzw. } \underline{h_s = 11,94 \text{ cm}}$$

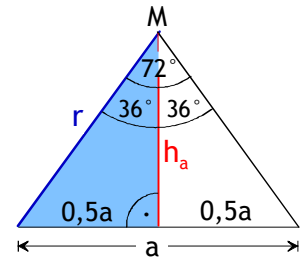
Mit $a = 8,06 \text{ cm}$ und $h_s = 11,94 \text{ cm}$ erhält man für $M_{Pyr} = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s$:

$$\underline{M_{Pyr} = 240,59 \text{ cm}^2}$$

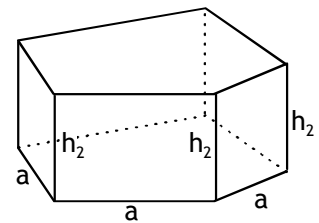
Einsetzen von $G = 111,83 \text{ cm}^2$, $M_{Pr} = 225,68 \text{ cm}^2$ und $M_{Pyr} = 240,59 \text{ cm}^2$ in $O = G + M_{Pr} + M_{Pyr}$ ergibt schließlich:

$$\underline{O = 111,83 \text{ cm}^2 + 225,68 \text{ cm}^2 + 240,59 \text{ cm}^2 = 578,1 \text{ cm}^2}$$

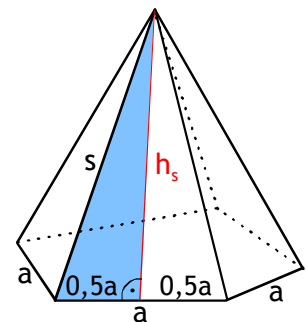
Ergebnis: Der Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers beträgt $O = 578,1 \text{ cm}^2$.



Figur 4



Figur 5



Figur 6



Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W3

Aufgabe W3a:

Lösungsübersicht:

- Die Wahrscheinlichkeit, **zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen**, kann mit der Produkt- und der Summenregel berechnet werden. Dabei muss beachtet werden, dass die zwei Kugeln *ohne* Zurücklegen gezogen werden. Und weil es von der Farbe Gelb nur *eine* Kugel gibt, kommen daher nur die Ergebnisse „zwei blaue Kugeln“ (b; b) und „zwei rote Kugeln“ (r; r) infrage.
 - Zur Berechnung des **Erwartungswerts** benötigt man dann noch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „eine blaue und eine gelbe Kugel“. Dieses Ereignis setzt sich aus den Ergebnissen (g; b) und (b; g) zusammen. Deren Wahrscheinlichkeiten können mit der Produktregel berechnet werden. Den Erwartungswert erhält man dann mit der entsprechenden Formel (siehe Formelsammlung).
 - Den **neuen Gewinn für das Ereignis „eine gelbe und eine blaue Kugel“** kann man berechnen, indem man in der Formel zur Berechnung des Erwartungswerts den bisherigen Erwartungswert verdoppelt und den Gewinn für das Ereignis „eine gelbe und eine blaue Kugel“ mit der Variablen x bezeichnet. Die Lösung der resultierenden Gleichung ist dann der gesuchte Wert.
- Man beachte:** Wenn man den Erwartungswert aus Sicht eines Spielers bestimmt, erhält man einen negativen Erwartungswert.

Die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen:

Das Ereignis „zwei gleichfarbige Kugeln“ setzt sich aus den Ergebnissen (b; b) und (r; r) zusammen. Weil *ohne* Zurücklegen gezogen wird und sich nur *eine* gelbe Kugel in dem Gefäß befindet, ist das Ergebnis „zwei gelbe Kugeln“ nicht möglich.

Mit der Produktregel erhält man:

$$P(b; b) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = 10,7 \% \quad \text{und} \quad P(r; r) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{56} = 21,4 \%$$

Man beachte, dass ohne Zurücklegen gezogen wird. Das heißt, dass nach dem ersten Zug nur noch 7 Kugeln in dem Gefäß sind und beim zweiten Zug die zuerst gezogene Kugel fehlt.

Mit der Summenregel folgt: $P(\text{zwei gleichfarbige K.}) = \frac{6}{56} + \frac{12}{56} = \frac{18}{56} = 32,1 \%$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleichfarbige Kugeln gezogen werden, ist

$$P(\text{zwei gleichfarbige Kugeln}) = \frac{18}{56} = 32,1 \%$$

Berechnung des Erwartungswerts (aus Sicht eines Spielers):

Für den Erwartungswert E aus Sicht eines Spielers gilt (siehe Formelsammlung):

$$E = P(\text{zwei gleichfarbige K.}) \cdot 4,00 \text{ €} + P(\text{eine gelbe und eine blaue K.}) \cdot 10,00 \text{ €} - 2,50 \text{ €}$$

Mit $P(\text{zwei gleichfarbige K.}) = \frac{18}{56}$ (siehe oben) folgt:

$$E = \frac{18}{56} \cdot 4,00 \text{ €} + P(\text{eine gelbe und eine blaue K.}) \cdot 10,00 \text{ €} - 2,50 \text{ €}$$

Man benötigt also noch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „eine blaue und eine gelbe Kugel“. Dieses Ereignis setzt sich aus den Ergebnissen (g; b) und (b; g) zusammen. Deren Wahrscheinlichkeiten kann man mit der Produktregel berechnen:

$$P(g; b) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{56} = 5,4 \% \quad \text{und} \quad P(b; g) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{56} = 5,4 \%$$

Mit der Summenregel folgt: $P(\text{eine gelbe und eine blaue Kugel}) = \frac{3}{56} + \frac{3}{56} = \frac{6}{56}$

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W3



Einsetzen in $E = \frac{18}{56} \cdot 4,00 \text{ €} + P(\text{eine gelbe und eine blaue K.}) \cdot 10,00 \text{ €} - 2,50 \text{ €}$ ergibt:

$$E = \frac{18}{56} \cdot 4,00 \text{ €} + \frac{6}{56} \cdot 10,00 \text{ €} - 2,50 \text{ €} = -\frac{8}{56} \approx -0,14 \text{ €}$$

Ergebnis:

Der Erwartungswert aus Sicht eines Spielers ist $E = -0,14 \text{ €}$. Ein Spieler muss also mit Verlust rechnen.

Der neue Gewinn für das Ereignis „eine gelbe und eine blaue Kugel“, wenn der Gewinn pro Spiel verdoppelt werden soll:

Wenn der Gewinn des Veranstalters verdoppelt werden soll, muss der neue Erwartungswert (aus Sicht eines Spielers) $E_{\text{neu}} = -0,28 \text{ €}$ betragen.

Der neue Gewinn des Ereignisses „eine gelbe und eine blaue Kugel“ werde mit der Variablen x bezeichnet. Dann gilt für den neuen Erwartungswert E_{neu} :

$$E_{\text{neu}} = \frac{18}{56} \cdot 4,00 \text{ €} + \frac{6}{56} \cdot x - 2,50 \text{ €}$$

Einsetzen von $E_{\text{neu}} = -0,28 \text{ €}$ ergibt:

$$-0,28 = \frac{18}{56} \cdot 4,00 + \frac{6}{56} \cdot x - 2,50 \quad | +2,50$$

$$\Leftrightarrow 2,22 = \frac{72}{56} + \frac{6}{56} \cdot x \quad | \cdot 56$$

$$\Leftrightarrow 124,32 = 72 + 6 \cdot x \quad | -72$$

$$\Leftrightarrow 52,32 = 6 \cdot x \quad | : 6$$

$$\Leftrightarrow 8,72 = x \text{ bzw. } x = 8,72 \text{ €}$$

Ergebnis:

Wenn der Veranstalter seinen Gewinn auf lange Sicht verdoppeln will, darf der Gewinn für das Ereignis „eine gelbe und eine blaue Kugel“ nur noch $x = 8,72 \text{ €}$ betragen.



Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W3

Aufgabe W3b:

Lösungsübersicht:

- Um eine **Funktionsgleichung der parabelförmigen Außenkante** des Hauses aufstellen zu können, muss man diese Außenkante in einem Koordinatensystem skizzieren. Dabei muss man beachten, dass der Scheitelpunkt der entsprechenden Parabel auf der y-Achse liegt, damit man sie mit einer Funktionsgleichung der Art $y = ax^2 + c$ beschreiben kann. Der Boden des Hauses sollte auf Höhe der x-Achse verlaufen (siehe Figur 1). Mit den angegebenen Maßen des Hauses hat der Scheitelpunkt in diesem Koordinatensystem die Koordinaten $S(0|3)$. Die Nullstellen sind $N_1(-1,35|0)$ und $N_2(1,35|0)$. Damit kann die Parabelgleichung aufgestellt werden.
- Um die **Länge des Vordachs** zu bestimmen, muss man diejenigen zwei Punkte auf der parabelförmigen Außenkante bestimmen, deren y-Koordinate $y = 2,0$ m ist (siehe Figur 2). Dazu setzt man $y = 2$ in die bereits berechnete Parabelgleichung ein und löst nach x auf. Man erhält zwei x-Werte, deren Differenz die gesuchte Länge des Vordachs ist.
- Zur Berechnung des **Flächeninhalts der Eingangstür** benötigt man noch deren Breite. Diese Breite kann aus der Vorgabe bestimmt werden, dass der Türrahmen in 1,0 m Höhe links und rechts einen Abstand von 0,7 m zu der Außenkante hat. Dazu muss man diejenigen Punkte auf der parabelförmigen Außenkante bestimmen, deren y-Koordinate $y = 1,0$ m ist (siehe Figur 3). Durch Einsetzen von $y = 1,0$ in die Parabelgleichung der Außenkante erhält man die x-Koordinaten dieser Punkte, woraus die Breite der Eingangstür berechnet werden kann (siehe Figur 3).

Eine mögliche Funktionsgleichung für die Außenkante des Hauses:

Zunächst muss man in einem Koordinatensystem eine Skizze der Parabel erstellen, die das Profil der Außenkante beschreibt (siehe Figur 1). Diese Parabel sollte symmetrisch zur y-Achse verlaufen, sodass man die Parabel mit der allgemeinen Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben kann. Außerdem sollte der Boden des Hauses auf der x-Achse liegen.

Der Scheitelpunkt der Parabel hat in diesem Koordinatensystem die Koordinaten $S(0|3)$, da die Vorderseite des Hauses 3,00 m hoch ist. Daraus erhält man sofort den entsprechenden c-Wert: $c = 3$.

Die unvollständige Parabelgleichung lautet somit: $y = ax^2 + 3$

Den fehlenden a-Wert kann man nun mithilfe einer der beiden Nullstellen berechnen. Weil das Haus am Boden 2,70 m breit sein soll, folgt aus Symmetriegründen (siehe Figur 1):

$N_1(-1,35|0)$ und $N_2(1,35|0)$

Einsetzen der Koordinaten von $N_2(1,35|0)$ in die Gleichung $y = ax^2 + 3$ ergibt:

$$0 = a \cdot 1,35^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow 0 = a \cdot 1,8225 + 3 \quad | -3$$

$$\Leftrightarrow -3 = a \cdot 1,8225 \quad | : 1,8225$$

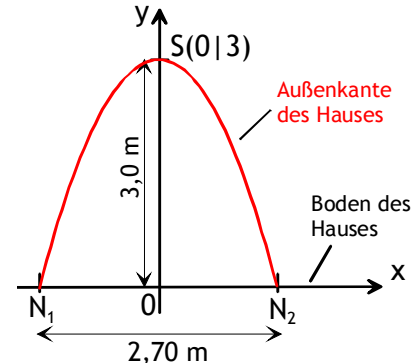
$$\Leftrightarrow -1,646 = a \text{ bzw. } a = -1,646$$

Damit lautet die Parabelgleichung im gewählten Koordinatensystem: $y = -1,646x^2 + 3$

(Hinweis: Man hätte auch die Koordinaten von $N_1(-1,35|0)$ in $y = ax^2 + 3$ einsetzen können.)

Ergebnis: Eine Gleichung der Parabel zur Beschreibung der Außenkante des Hauses ist $y = -1,646x^2 + 3$.

(Hinweis: Der exakte Wert für a ist $a = -\frac{400}{243}$.)



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W3



Die Länge des Vordachs:

Weil sich das Vordach in 2,0 m Höhe befindet, haben ihre beiden Endpunkte auf der Außenkante des Hauses die Koordinaten $A(x_1|2)$ und $B(x_2|2)$ (siehe Figur 2).

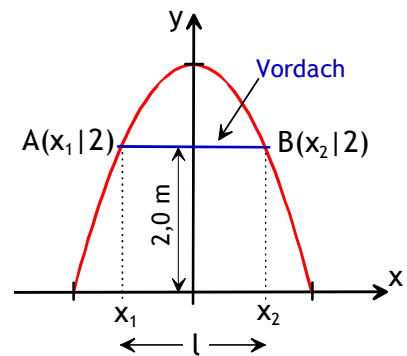
Für die gesuchte Länge l des Vordachs gilt somit: $l = x_2 - x_1$

Die Koordinaten x_1 und x_2 berechnet man, indem man die y-Koordinate $y = 2$ in die Funktionsgleichung $y = -1,646x^2 + 3$ einsetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned} 2 &= -1,646x^2 + 3 & | -3 \\ \Leftrightarrow -1 &= -1,646x^2 & | :(-1,646) \\ \Leftrightarrow 0,608 &= x^2 & | \pm\sqrt{} \\ \Rightarrow x_1 &= -0,78 \text{ und } x_2 = +0,78 \end{aligned}$$

Einsetzen in $l = x_2 - x_1$ ergibt: $l = 0,78 - (-0,78) = 1,56 \text{ m}$

Ergebnis: Das Vordach hat die Länge $l = 1,56 \text{ m}$.



Figur 2

Der Flächeninhalt der Tür:

Die Höhe der Tür beträgt 2,0 m. Mit der Breite b gilt für den Flächeninhalt der Tür: $A_T = 2 \cdot b$

Die Breite b der Tür kann aus der waagrechten Entfernung des Türrahmens zu der Außenkante des Hauses berechnet werden. Es gilt (siehe Figur 3):

$$\begin{aligned} 0,7 + b + 0,7 &= x_4 - x_3 \\ \Leftrightarrow 1,4 + b &= x_4 - x_3 \end{aligned}$$

x_3 und x_4 sind die x-Koordinaten der Punkte C und D auf der Außenkante in 1,0 m Höhe (siehe Figur 3). Die y-Koordinate der Punkte C und D ist jeweils $y = 1$.

Durch Einsetzen von $y = 1$ in die Funktionsgleichung $y = -1,646x^2 + 3$ erhält man die x-Koordinaten x_3 und x_4 :

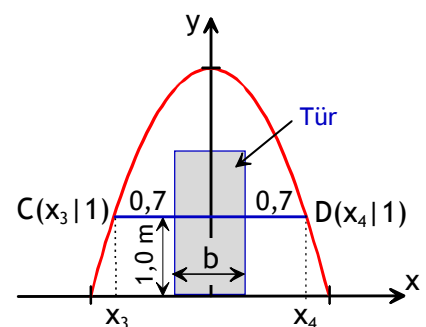
$$\begin{aligned} 1 &= -1,646x^2 + 3 & | -3 \\ \Leftrightarrow -2 &= -1,646x^2 & | :(-1,646) \\ \Leftrightarrow 1,215 &= x^2 & | \pm\sqrt{} \\ \Rightarrow x_3 &= -1,10 \text{ und } x_4 = +1,10 \end{aligned}$$

Einsetzen in $1,4 + b = x_4 - x_3$ ergibt:

$$\begin{aligned} 1,4 + b &= 2,20 & | -1,4 \\ \Leftrightarrow b &= 0,8 \end{aligned}$$

Einsetzen von $b = 0,8$ in $A_T = 2 \cdot b$ ergibt: $A_T = 1,60 \text{ m}^2$

Ergebnis: Der Flächeninhalt der Tür beträgt $A_T = 1,60 \text{ m}^2$.



Figur 3

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W4



Aufgabe W4a:

Lösungsübersicht:

- Die **Koordinaten des Schnittpunkts Q_1** erhält man, indem man die Funktionsgleichungen der Parabeln p_1 und p_2 gleichsetzt. Die fehlende Funktionsgleichung der Parabel p_2 kann man durch Einsetzen der Koordinaten ihres Scheitelpunkts $S_2(1|-7)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ bestimmen.
- Die **Punkte N_1 und N_2** haben die y-Koordinate $y = 0$, da sie laut Aufgabenstellung auf der x-Achse liegen. Ihre x-Koordinaten berechnet man, indem man in der Funktionsgleichung von p_1 für $y = 0$ setzt.
- Den **Flächeninhalt des Dreiecks $N_1Q_1N_2$** kann man mit der Formel $A = \frac{1}{2} g \cdot h$ berechnen.

Als Grundseite g des Dreiecks $N_1Q_1N_2$ sollte man die Strecke $\overline{N_1N_2}$ nehmen. Die Höhe h bezüglich der Grundseite g ist der Betrag der y-Koordinate von Q_1 (siehe Figur 1).

- Der **Flächeninhalt des Dreiecks $N_1Q_2N_2$** wird dann am größten, wenn der Punkt Q_2 mit dem Scheitelpunkt S_2 zusammenfällt (siehe Figur 2). Den Flächeninhalt des Dreiecks $N_1Q_2N_2$ berechnet man dann so wie den Flächeninhalt des Dreiecks $N_1Q_1N_2$ im vorigen Aufgabenteil.

Die Koordinaten des Schnittpunkts Q_1 :

Zunächst muss man mithilfe der Koordinaten des Scheitelpunkts $S_2(1|-7)$ die Funktionsgleichung der Parabel p_2 bestimmen. Einsetzen der Koordinaten von $S_2(1|-7)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ (für $d = 1$ und $e = -7$) ergibt:

$$p_2: y = (x - 1)^2 + (-7) = x^2 - 2x + 1 - 7 = x^2 - 2x - 6$$

Gleichsetzen der Funktionsgleichungen von $p_1: y = x^2 - 8x + 12$ und $p_2: y = x^2 - 2x - 6$ ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 12 &= x^2 - 2x - 6 & | -x^2 \\ \Leftrightarrow -8x + 12 &= -2x - 6 & | +2x - 12 \\ \Leftrightarrow -6x &= -18 & | :(-6) \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

Das ist die x-Koordinate des Punktes $Q_1(3|y_Q)$. Dessen y-Koordinate erhält man durch Einsetzen von $x = 3$ in eine der beiden Gleichungen von p_1 oder p_2 . Einsetzen von $x = 3$ in $p_1: y = x^2 - 8x + 12$ ergibt:

$$y = 3^2 - 8 \cdot 3 + 12 = 9 - 24 + 12 = -3$$

Ergebnis: Der Schnittpunkt der Parabeln p_1 und p_2 hat die Koordinaten $Q_1(3|-3)$.

Die Koordinaten der Schnittpunkte N_1 und N_2 von p_1 mit der x-Achse:

Einsetzen von $y = 0$ in $p_1: y = x^2 - 8x + 12$ ergibt: $0 = x^2 - 8x + 12$ bzw. $x^2 - 8x + 12 = 0$

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ und $b = -8$, $c = 12$ erhält man:

$$x_1 = 4 - \sqrt{4^2 - 12} = 4 - \sqrt{4} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 4 + \sqrt{4^2 - 12} = 4 + \sqrt{4} = 6$$

Das sind die x-Koordinaten von N_1 und N_2 . Die y-Koordinaten von N_1 und N_2 sind $y = 0$, weil beide Punkte auf der x-Achse liegen.

Ergebnis: Die Punkte N_1 und N_2 haben die Koordinaten $N_1(2|0)$ und $N_2(6|0)$.

(Hinweis: Die Bezeichnung beider Punkte kann auch vertauscht werden.)



Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W4

Der Flächeninhalt des Dreiecks $N_1Q_1N_2$:

Den Flächeninhalt des Dreiecks $N_1Q_1N_2$ kann man mit der Formel $A = \frac{1}{2} g \cdot h$ berechnen. Als Grundseite g des Dreiecks $N_1Q_1N_2$ sollte man die Strecke $\overline{N_1N_2}$ nehmen.

Dem Schaubild entnimmt man (siehe Figur 1):

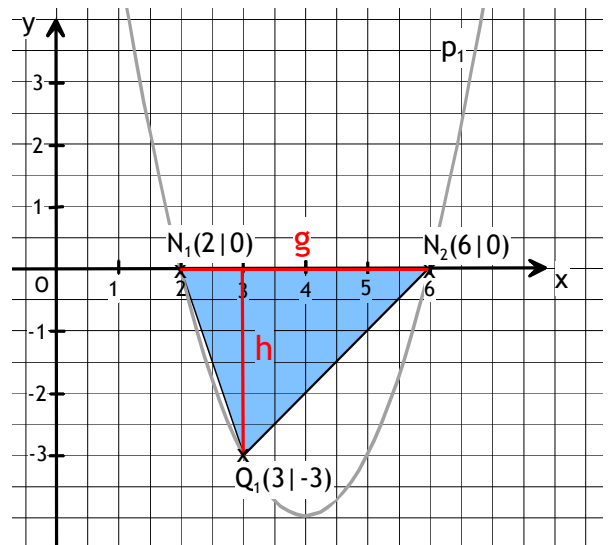
$$g = \overline{N_1N_2} = 4 \text{ LE}$$

Die Höhe h bezüglich der Grundseite g ist der Betrag der y -Koordinate von $Q_1(3|-3)$ (siehe Figur 1):

$$h = 3 \text{ LE}$$

Einsetzen von $g = 4$ und $h = 3$ in $A = \frac{1}{2} g \cdot h$ ergibt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ FE}$$



Figur 1

Ergebnis:

Das Dreieck $N_1Q_1N_2$ hat den Flächeninhalt **$A = 6 \text{ FE}$** .

(Hinweis: FE = Flächeneinheiten.)

Die Lage des Punktes Q_2 und der maximale Flächeninhalt des Dreiecks $N_1Q_2N_2$:

Für den Flächeninhalt des Dreiecks $N_1Q_2N_2$

$$\text{gilt (siehe Figur 2): } A_2 = \frac{1}{2} g \cdot h_2$$

Die Grundseite g ist nach wie vor **$g = 4 \text{ LE}$** .

Der Flächeninhalt A_2 wird also dann am größten, wenn die Höhe h_2 ihren größten Wert annimmt.

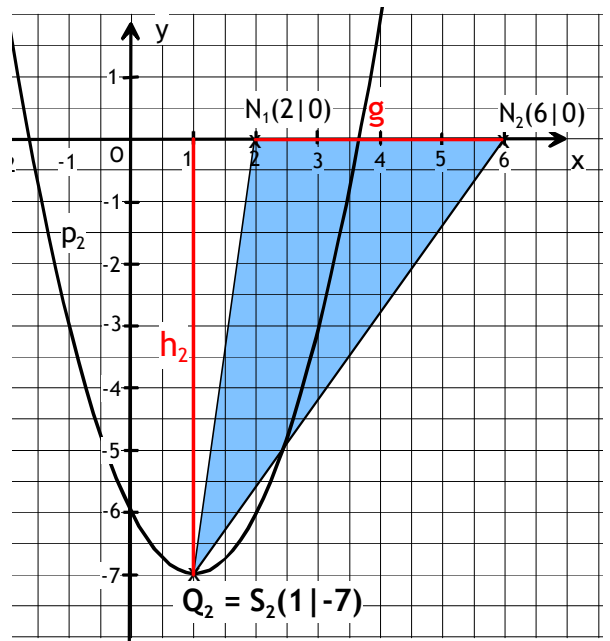
Wie man im Schaubild erkennt, ist dies dann der Fall, wenn der Punkt Q_2 mit dem Scheitelpunkt S_2 der Parabel p_2 zusammenfällt (siehe Figur 2):

$$Q_2 = S_2(1|-7)$$

Die Höhe h_2 ist somit der Betrag der y -Koordinate von $Q_2(1|-7)$; also: **$h_2 = 7 \text{ LE}$**

Einsetzen von $g = 4$ und $h_2 = 7$ in $A_2 = \frac{1}{2} g \cdot h_2$ ergibt:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14 \text{ FE}$$



Figur 2

Ergebnis:

Der Flächeninhalt des Dreiecks $N_1Q_2N_2$ wird dann am größten, wenn Q_2 mit S_2 zusammenfällt: **$Q_2(1|-7)$**

Der maximale Flächeninhalt des Dreiecks $N_1Q_2N_2$ ist **$A_2 = 14 \text{ FE}$** . (Hinweis: FE = Flächeneinheiten.)

Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W4



Aufgabe W4b:

Lösungsübersicht:

- Für den **Umfang des Dreiecks ABC** gilt: $u = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$. Weil das Dreieck ABC gleichschenkelig ist mit $\overline{AB} = 12,4 \text{ cm}$ und $\overline{AC} = \overline{BC}$, folgt: $u = 12,4 + 2 \overline{BC}$

Zur Berechnung der Strecke $\overline{BC}$ muss man die Höhe h des gleichschenkligen Dreiecks ABC bezüglich der Grundseite $\overline{AB}$ einzeichnen. Man beachte dabei, dass die Höhe h die Seite $\overline{AB}$ halbiert. Wenn man die Höhe h kennt, kann man die Strecke $\overline{BC}$ mit dem Satz des Pythagoras berechnen (siehe Figur 1).

Für die Höhe h gilt (siehe Figur 2): $h = 2h_a$, wobei h_a die Höhe eines der 6 gleichseitigen Dreiecke ist, aus denen das Sechseck besteht. Für die Höhe h_a eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a gilt:

$$h_a = \frac{a}{2} \sqrt{3} \quad (\text{siehe Formelsammlung}). \quad \text{In der Aufgabe ist } a = \overline{AB} = 12,4 \text{ cm}.$$

- Zur **Überprüfung von Toms Behauptung** kann man die Formeln für die Flächeninhalte des Dreiecks ABC und des Sechsecks miteinander vergleichen bzw. die beiden Flächeninhalte berechnen. Für den

Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechsecks gilt (siehe Formelsammlung): $A_6 = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3}$, mit $a = \overline{AB}$.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt (siehe Figur 3): $A_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$, mit $h = 2h_a$ und $h_a = \frac{a}{2} \sqrt{3}$.

Zur *argumentativen* Überprüfung muss man das Sechseck in 6 gleichseitige Dreiecke unterteilen und die Summe ihrer Flächeninhalte mit dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC vergleichen (siehe Figur 3).

Der Umfang des Dreiecks ABC:

Für den Umfang u des Dreiecks ABC gilt (siehe Figur 1): $u = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$

Mit $\overline{AB} = 12,4 \text{ cm}$ und $\overline{AC} = \overline{BC}$ folgt: $u = 12,4 + 2 \overline{BC}$

Zur Berechnung der Strecke $\overline{BC}$ muss man die Höhe h des gleichschenkligen Dreiecks ABC einzeichnen (siehe Figur 1).

Weil das Dreieck ABC gleichschenkelig ist mit $\overline{BC} = \overline{AC}$, halbiert die Höhe h die Grundseite $\overline{AB} = 12,4 \text{ cm}$.

Mit dem Satz des Pythagoras gilt für $\overline{BC}$ (siehe Figur 1): $\overline{BC}^2 = h^2 + 6,2^2$

Um die Höhe h bestimmen zu können, muss man zwei gleichseitige Dreiecke in das regelmäßige Sechseck einzeichnen (siehe Figur 2).

Jedes dieser gleichseitigen Dreiecke hat die Höhe h_a , mit der die Höhe h berechnet werden kann. Es gilt (siehe Figur 2): $h = 2h_a$

Mit der Formel $h_a = \frac{a}{2} \sqrt{3}$ (siehe Formelsammlung) und $a = \overline{AB} = 12,4 \text{ cm}$

erhält man: $h_a = 10,74 \text{ cm}$ und $h = 21,48 \text{ cm}$

Einsetzen von $h = 21,48 \text{ cm}$ in $\overline{BC}^2 = h^2 + 6,2^2$ ergibt:

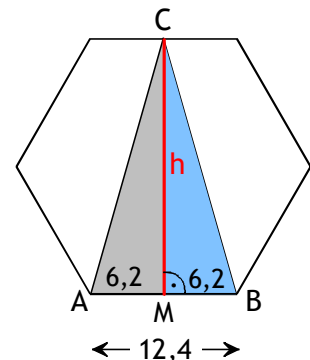
$$\overline{BC}^2 = 21,48^2 + 6,2^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 499,83 \quad | \sqrt{}$$

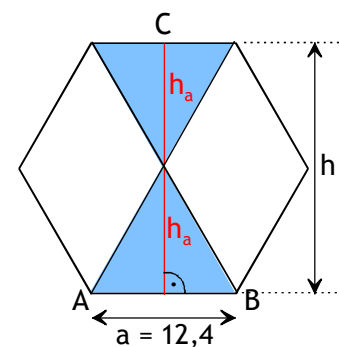
$$\Rightarrow \overline{BC} = 22,36 \text{ cm}$$

Einsetzen von $\overline{BC} = 22,36 \text{ cm}$ in $u = 12,4 + 2 \overline{BC}$ ergibt: $u = 57,12 \text{ cm}$

Ergebnis: Der Umfang des Dreiecks ABC beträgt $u = 57,12 \text{ cm}$.



Figur 1



Figur 2



Lösungen zur Prüfung 2022: Wahlbereich - Aufgabe W4

Überprüfen von Toms Behauptung:

Rechnerische Überprüfung:

Für den Flächeninhalt eines regelmäßiges Sechsecks gilt (siehe Formelsammlung): $A_6 = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3}$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt (siehe Figur 3): $A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h$ bzw. $A_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$

Mit $h = 2h_a$ und der Formel $h_a = \frac{a}{2} \sqrt{3}$ (siehe oben) folgt: $h = 2 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = a \sqrt{3}$

Einsetzen von $h = a \sqrt{3}$ in $A_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$ ergibt: $A_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot a \sqrt{3} = \frac{a^2}{2} \sqrt{3}$

Vergleicht man $A_6 = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3} = 3 \cdot \frac{a^2}{2} \sqrt{3}$ mit $A_{ABC} = \frac{a^2}{2} \sqrt{3}$, erkennt man: $A_6 = 3 A_{ABC}$

Somit stimmt Toms Behauptung.

Ergebnis: Tom hat recht.

Hinweis:

Man kann mit den obigen Formeln auch die Zahlenwerte der Flächeninhalte bestimmen. Man erhält:

$A_6 = 399,48 \text{ cm}^2$ und $A_{ABC} = 133,18 \text{ cm}^2$, woraus ebenfalls folgt: $A_6 : A_{ABC} = 3,00$

Argumentative Überprüfung:

Das regelmäßige Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken mit der Grundseite $a = \overline{AB}$ und der Höhe h_a . Eines dieser Dreiecke ist das Dreieck ABD (siehe Figur 3).

Das Dreieck ABC hat ebenfalls die Grundseite $a = \overline{AB}$, aber die doppelte Höhe $h = 2h_a$.

Somit ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABD. Es gilt also:

$$A_{ABC} = 2 A_{ABD}$$

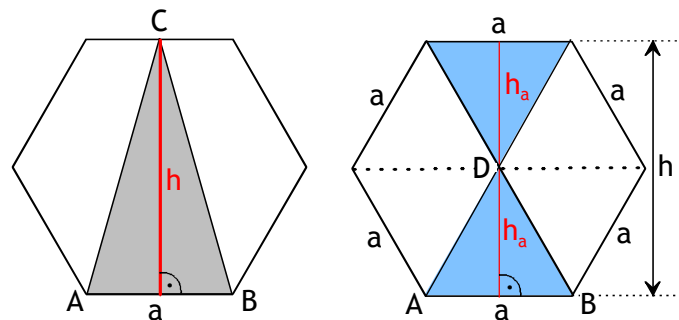
Multiplikation dieser Gleichung mit dem Faktor 3 ergibt:

$$3 A_{ABC} = 6 A_{ABD}$$

Und weil das Sechseck den Flächeninhalt $6 A_{ABD}$ hat, gilt:

$$3 A_{ABC} = A_{\text{Sechseck}}$$

Genau dies ist Toms Behauptung. Tom hat also recht.



Figur 3