



Teil A₁ und A₂ - Pflichtteil:

Pflichtteil A1	2
Pflichtteil A2	9

Teil B - Wahlteil:

Aufgabe W1a	16
Aufgabe W1b	18
Aufgabe W2a	20
Aufgabe W2b	22
Aufgabe W3a	24
Aufgabe W3b	26
Aufgabe W4a	28
Aufgabe W4b	31

Wichtige Hinweise zum Copyright:

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und nur für die eigene Nutzung zugelassen. Kopieren und Vervielfältigen der vorliegenden Datei ist verboten! Jede Nutzung in anderen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags.

Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung vervielfältigt oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Ausgenommen von diesen Regelungen ist die **Verwendung für folgende Unterrichtszwecke:**

So dürfen Lehrkräfte die vorliegende Datei zu Unterrichtszwecken ausdrucken, mit elektronischen Projektionsverfahren (wie Laptop und Beamer) einsetzen und OHP-Folien erstellen. Verboten ist allerdings die Weitergabe der Datei auf elektronischen Datenträgern.

Verstöße werden strafrechtlich verfolgt!

© Mathematik-Verlag 2026, Mosbach

Mathematik-Verlag Rainer Hild
Steige 44-2
74821 Mosbach
Internet: <https://matheverlag.com>
E-Mail: info@matheverlag.com

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A1



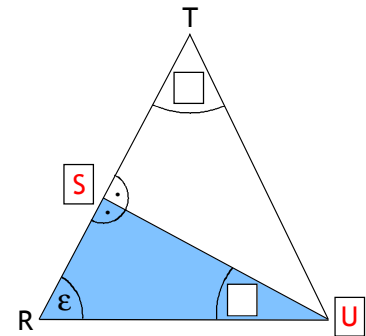
Aufgabe 1:

Fehlende Punkte und Winkel in der Abbildung:

- Die Gleichung $\sin \varepsilon = \frac{\overline{SU}}{\overline{RU}}$ muss sich auf das markierte rechtwinklige Dreieck der Figur 1 beziehen, weil der Winkel ε in keinem anderen rechtwinkligen Dreieck vorkommt.

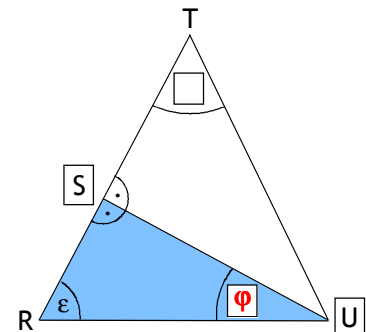
Wegen $\sin \varepsilon = \frac{\overline{SU}}{\overline{RU}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ muss die Seite $\overline{RU}$ die Hypotenuse sein. Daraus folgt die Lage des Punktes **U** (siehe Figur 1).

Die Gegenkathete ist vom Winkel ε aus betrachtet die Seite $\overline{SU}$. Die dritte Ecke des markierten Dreiecks der Figur 1 muss daher **S** sein.



Figur 1

- Wegen $\cos \varphi = \frac{\overline{SU}}{\overline{RU}} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ muss der fehlende Winkel im Dreieck RUS der **Winkel φ** sein (siehe Figur 2).

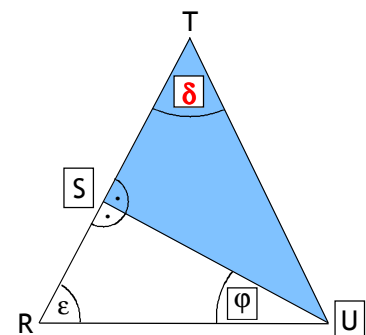


Figur 2

- Die Gleichung $\tan \delta = \frac{\overline{SU}}{\overline{ST}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ stimmt nur, wenn der fehlende Winkel im Dreieck UTS der **Winkel δ** bei T ist (siehe Figur 3).

$\overline{SU}$ ist im Dreieck UTS von δ aus betrachtet die Gegenkathete.

$\overline{ST}$ ist im Dreieck UTS von δ aus betrachtet die Ankathete.



Figur 3

Aufgabe 2:

a) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Augensumme ungerade“:

Auf jedem Würfel gibt es 3 ungerade und 3 gerade Augenzahlen. Die Augensumme der beiden geworfenen Augenzahlen ist dann ungerade, wenn auf einem Würfel eine ungerade Augenzahl (u) erscheint und auf dem anderen eine gerade Augenzahl (g). Das sind die Ergebnisse (u; g) und (g; u). (Hinweis: In dieser Schreibweise steht der linke Buchstabe für die Augenzahl des linken Würfels und der rechte Buchstabe für die Augenzahl des rechten Würfels.)

Für die Wahrscheinlichkeiten dieser Ergebnisse gilt:

$$P(u; g) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(g; u) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Mit der Summenregel folgt: $P(\text{Augensumme ungerade}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Augensumme ungerade“ ist $\frac{1}{2} = 0,5 = 50 \%$.

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A1



b) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Augensumme kleiner als 4“:

Die Augensumme ist dann kleiner als 4, wenn folgende Ergebnisse auftreten: (1; 1); (1; 2) und (2; 1). (Hinweis: In dieser Schreibweise steht die linke Zahl für die Augenzahl des linken Würfels und die rechte Zahl für die Augenzahl des rechten Würfels.)

Für die Wahrscheinlichkeiten dieser Ergebnisse gilt:

$$P(1; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad \text{und} \quad P(1; 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad \text{und} \quad P(2; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Mit der Summenregel folgt:

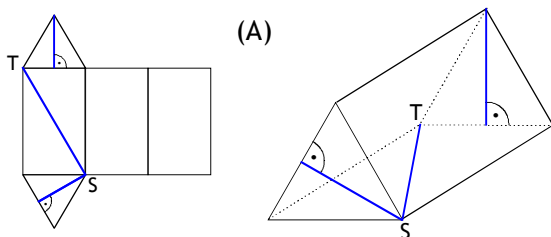
$$P(\text{Augensumme kleiner 4}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Augensumme kleiner 4“ ist $\frac{1}{12}$.

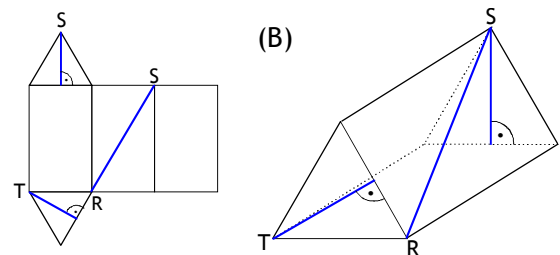
Aufgabe 3:

Das Netz mit dem richtigen Streckenzug:

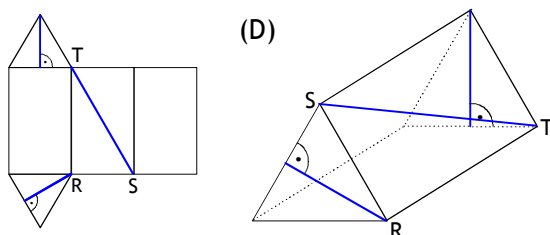
Die Netze A, B und D scheiden allein schon deshalb aus, weil der Streckenzug auf den zugehörigen Prismen nicht durchgängig ist (siehe Figuren 1; 2 und 3). Der Streckenzug ist daher allein auf dem Netz (C) richtig abgebildet (siehe Figur 4).



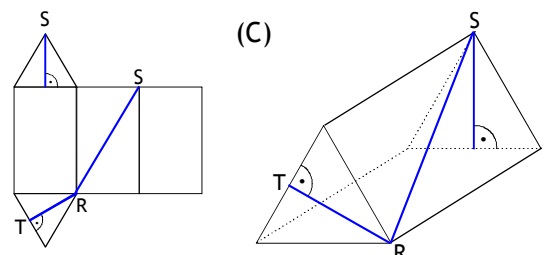
Figur 1: Netz (A) und das zugehörige Prisma



Figur 2: Netz (B) und das zugehörige Prisma



Figur 3: Netz (D) und das zugehörige Prisma



Figur 4: Netz (C) und das zugehörige Prisma

Ergebnis: Der Streckenzug ist auf dem Netz (C) richtig abgebildet.

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A1



Aufgabe 4:

Die Parabel, die die x-Achse zweimal schneidet:

Variante 1: grafische Begründung

Man muss beachten, ob die jeweilige Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Wenn man dann noch die Lage des Scheitelpunkts kennt, kann man abschätzen, wie oft die Parabel die x-Achse schneidet. Man erhält dabei:

- **Parabel p_1 :** $y = (x + 3)^2 = (x + 3)^2 + 0$. Der Scheitelpunkt ist $S_1(-3 | 0)$.

Der Scheitelpunkt liegt also auf der x-Achse. Das heißt, die Parabel p_1 hat nur einen Punkt mit der x-Achse gemeinsam - unabhängig davon, ob sie nach oben oder unten geöffnet ist.

(Hinweis: p_1 ist nach oben geöffnet.)

- **Parabel p_2 :** $y = -\frac{1}{3}x^2 - 3$ hat den Scheitelpunkt $S_2(0 | -3)$ und ist nach unten geöffnet.

Weil der Scheitelpunkt $S_2(0 | -3)$ unterhalb der x-Achse liegt und die Parabel p_2 nach unten geöffnet ist, schneidet die Parabel p_2 die x-Achse überhaupt nicht.

(Hinweis: Die Parabel p_2 ist nach unten geöffnet, weil vor „ $\frac{1}{3}x^2$ “ ein Minuszeichen steht.)

- **Parabel p_3 :** $y = (x - 3)^2 - 3$ hat den Scheitelpunkt $S_3(3 | -3)$ und ist nach oben geöffnet.

Der Scheitelpunkt liegt also unterhalb der x-Achse. Und weil die Parabel p_3 nach oben geöffnet ist, schneidet sie die x-Achse zweimal.

(Hinweis: Die Parabel p_1 ist nach oben geöffnet, weil vor der Quadratklammer kein Vorzeichen bzw. ein „unsichtbares“ Plus steht.)

Ergebnis: Die Parabel p_3 schneidet die x-Achse zweimal.

Variante 2: rechnerische Begründung (etwas aufwändiger)

Indem man jeweils für $y = 0$ setzt, kann man die Nullstellen bzw. deren Anzahl berechnen. Man erhält:

- **Parabel p_1 :** $0 = (x + 3)^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{3^2 - 9} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{0} = -3$.

Weil die Diskriminante $D = 0$ ist, gibt es nur **1 Lösung**; nämlich $x_1 = -3$.

- **Parabel p_2 :** $0 = -\frac{1}{3}x^2 - 3 \Leftrightarrow -9 = x^2$. Diese Gleichung hat **keine Lösung**, weil die Quadratwurzel einer negativen Zahl (hier $\sqrt{-9}$) nicht definiert ist.

- **Parabel p_3 :** $0 = (x - 3)^2 - 3 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 6x + 9 - 3 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 6x + 6$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{3^2 - 6} = 3 \pm \sqrt{3}.$$

Weil die Diskriminante $D > 0$ ist, gibt es **2 Lösungen**; nämlich $x_1 = 3 + \sqrt{3}$ und $x_2 = 3 - \sqrt{3}$.

Ergebnis: Somit schneidet nur die Parabel p_3 die x-Achse zweimal.

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A1



Aufgabe 5:

Die Zahl, die eingesetzt werden muss:

Die gesuchte Zahl werde mit der Variablen x bezeichnet. Umformen der Gleichung ergibt dann:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{32} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{25} &= 3 & | \text{ Es ist } \sqrt{25} &= 5. \\
 \Leftrightarrow \sqrt{32} \cdot \sqrt{x} - 5 &= 3 & | +5 \\
 \Leftrightarrow \sqrt{32} \cdot \sqrt{x} &= 8 & | \text{ Zusammenfassen beider Wurzeln} \\
 \Leftrightarrow \sqrt{32 \cdot x} &= 8 & | \text{ Quadrieren beider Seiten}^* \\
 \Rightarrow 32x &= 8^2 \\
 \Leftrightarrow 32x &= 64 & | : 32 \\
 \Leftrightarrow x &= 2
 \end{aligned}$$

* Hinweis: Wenn man weiß, dass $\sqrt{64} = 8$ ist, folgt aus $\sqrt{32 \cdot x} = 8$ sofort die Gleichung $32x = 64$.

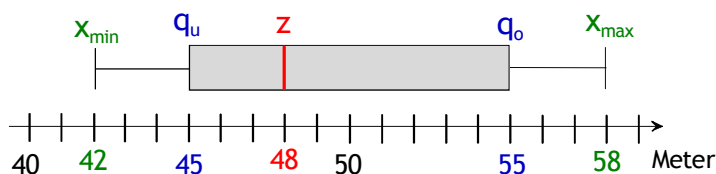
Ergebnis: Man muss die Zahl 2 in die Lücke einsetzen.

Aufgabe 6:

Die Rangliste, die zum Boxplot gehört:

Um den Boxplot der richtigen Rangliste zuordnen zu können, muss man die Kennwerte beider Ranglisten bestimmen. Die Kennwerte des Boxplots sind der Abbildung zufolge:

$x_{\min} = 42 \text{ m}$; $x_{\max} = 58 \text{ m}$; $z = 48 \text{ m}$; $q_u = 45 \text{ m}$ und $q_o = 55 \text{ m}$



• Beide Ranglisten haben den gleichen **Minimalwert** $x_{\min} = 42 \text{ m}$ und den gleichen **Maximalwert** $x_{\max} = 58 \text{ m}$. Diese Werte können also nicht zur Unterscheidung benutzt werden.

• Der **Zentralwert der Rangliste A** befindet sich wegen $\frac{1}{2} \cdot 13 = 6,5$ am 7. Platz der Rangliste. Das ist der Wert $z_A = 48 \text{ m}$.

Der **Zentralwert der Rangliste B** befindet sich wegen $\frac{1}{2} \cdot 9 = 4,5$ am 5. Platz der Rangliste. Das ist ebenfalls der Wert $z_B = 48 \text{ m}$.

Anhand der beiden gleichen Zentralwerte kann man den Boxplot also auch nicht zuordnen. Man muss daher die Quartile beider Ranglisten untersuchen:

• Das **obere Quartil** q_o der **Rangliste A** befindet sich wegen $\frac{3}{4} \cdot 13 = 9,75$ am 10. Platz der Rangliste.

Das ist der Wert $q_o = 54 \text{ m}$. Das obere Quartil von Rangliste A stimmt also nicht mit dem oberen Quartil des Boxplots überein. Rangliste A kann also allein deshalb nicht zum Boxplot gehören.

• Das **obere Quartil** q_o der **Rangliste B** befindet sich wegen $\frac{3}{4} \cdot 9 = 6,75$ am 7. Platz der Rangliste. Das ist der Wert $q_o = 55 \text{ m}$.

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A1



Das **untere Quartil** q_0 der Rangliste B befindet sich wegen $\frac{1}{4} \cdot 9 = 2,25$ am 3. Platz der Rangliste.

Das ist der Wert $q_u = 45$ m.

Alle Kennwerte von Rangliste B stimmen also mit den Kennwerten des Boxplots überein. Somit gehört die Rangliste B zum Boxplot.

Ⓑ	Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Strecke in m	42	44	45	46	48	50	55	56	58
		$x_{\min}$		q_u		z		q_o		$x_{\max}$

Ergebnis: Die Rangliste B gehört zu dem Boxplot.

Aufgabe 7:

Das Diagramm, das zur Tabelle gehört:

Zunächst muss man die Prozentsätze berechnen, die zu den Werten der Tabelle gehören.

• **Fußball:** 40 von 80 Stimmen sind $p_F \% = \frac{40}{80} \cdot 100 \% = \frac{1}{2} \cdot 100 \% = 50 \%$

• **Handball:** 24 von 80 Stimmen sind $p_H \% = \frac{24}{80} \cdot 100 \% = \frac{3}{10} \cdot 100 \% = 30 \%$

(Hinweis: Der Bruch $\frac{24}{80}$ kann mit 8 gekürzt werden: $\frac{24}{80} = \frac{24 : 8}{80 : 8} = \frac{3}{10}$)

• **Volleyball:** 16 von 80 Stimmen sind $p_V \% = \frac{16}{80} \cdot 100 \% = \frac{2}{10} \cdot 100 \% = 20 \%$

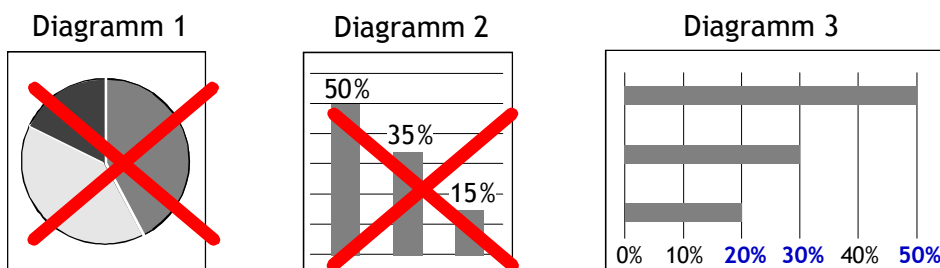
(Hinweis: Der Bruch $\frac{16}{80}$ kann mit 8 gekürzt werden: $\frac{16}{80} = \frac{16 : 8}{80 : 8} = \frac{2}{10}$. Weiteres Kürzen mit 2 ergibt $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.)

Zuordnung der Prozentsätze zu den Diagrammen:

• Diagramm 2 kann man auf den ersten Blick ausschließen, weil darin die Prozentsätze 50%, 35% und 15% nicht mit den berechneten Prozentsätzen übereinstimmen.

• In Diagramm 1 kommt der Prozentsatz 50 % nicht vor. Dazu müsste in Diagramm 1 einer der Kreisausschnitte ein Halbkreis sein.

• Das einzige Diagramm, dessen Prozentsätze mit den berechneten Prozentsätzen übereinstimmen, ist **Diagramm 3**.



Ergebnis: Zu der Tabelle gehört das Diagramm 3.

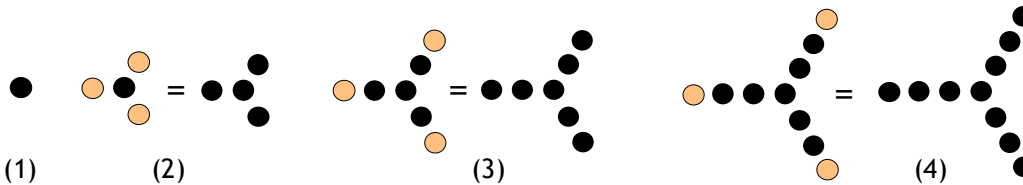


Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A1

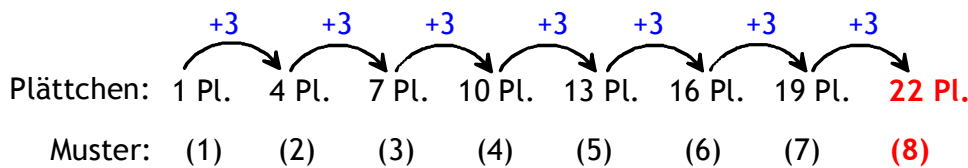
Aufgabe 8:

a) Die Anzahl der Plättchen für das 8. Muster:

Von jedem Muster zum nächsten nimmt die Anzahl der Plättchen um 3 zu:



Nach dieser Regel entwickelt sich die Anzahl der Plättchen folgendermaßen:



Ergebnis: Das 8. Muster besteht aus 22 Plättchen.

b) Welche Formeln Emily verwenden kann:

Variante 1: (durch Ausprobieren)

Um die richtige Formel herauszufinden, kann man die Probe mit verschiedenen Wertepaaren (n ; s) machen. Falls dann eine Formel eine falsche Anzahl an Plättchen ergibt, ist diese Formel falsch.

Ein Test mit dem Wertepaar (3 ; 7) (Muster 3 mit 7 Plättchen) ergibt jeweils:

- Einsetzen von $n = 3$ und $s = 7$ in die Formel $s = 3n - 2$ ergibt: $7 = 3 \cdot 3 - 2 \Leftrightarrow 7 = 7$; **wahre Aussage**

Hinweis: Wenn man alle anderen Wertepaare in $s = 3n - 2$ einsetzt, erhält man ebenfalls immer eine wahre Aussage.

- Einsetzen von $n = 3$ und $s = 7$ in die Formel $s = 3 - 2n$ ergibt: $7 = 3 - 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 7 = -3$; **falsche Aussage**
Diese Formel ist also auf jeden Fall falsch.

- Einsetzen von $n = 3$ und $s = 7$ in die Formel $s = 3(n - 1) + 1$ ergibt:

$$7 = 3 \cdot (3 - 1) + 1 \Leftrightarrow 7 = 3 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow 7 = 7; \text{ wahre Aussage}$$

Hinweise:

- 1.) Wenn man alle anderen Wertepaare in $s = 3(n - 1) + 1$ einsetzt, erhält man ebenfalls immer eine wahre Aussage.
- 2.) Es ist $3(n - 1) + 1 = 3n - 3 + 1 = 3n - 2$. Das ist die gleiche Formel wie die erste Formel. Sie muss also auch wahr sein.

- Einsetzen von $n = 3$ und $s = 7$ in die Formel $s = 2n - 1$ ergibt: $7 = 2 \cdot 3 - 1 \Leftrightarrow 7 = 5$; **falsche Aussage**
Diese Formel ist also auf jeden Fall falsch.

Ergebnis:

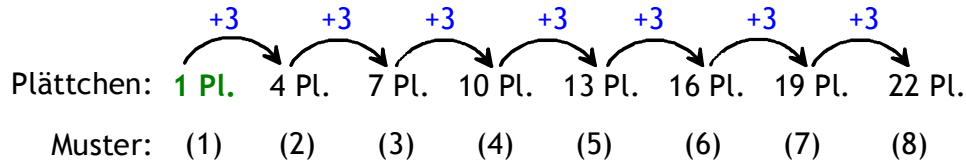
$s = 3n - 2$	$s = 3 - 2n$	$s = 3(n - 1) + 1$	$s = 2n - 1$
☒	☐	☒	☐

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A1



Variante 2: (schwierig)

Man kann sich die richtige Formel anhand der obigen Regel auch selber herleiten:



Indem man zu der Anzahl der Plättchen in Muster (1) jeweils die Anzahl der 3er-Schritte addiert, erhält man für die einzelnen Muster:

Muster (2): $s = 1 + 3 \cdot 1$ (= 1 plus 1 Dreierschritt)

Muster (3): $s = 1 + 3 \cdot 2$ (= 1 plus 2 Dreierschritte)

Muster (4): $s = 1 + 3 \cdot 3$ (= 1 plus 3 Dreierschritte)

. . . usw.

Man erkennt in dieser Reihe, dass der **rechte Faktor** in dem Produkt immer um 1 kleiner ist als die Nummer des Musters. Allgemein gilt also für die Anzahl s der Plättchen:

Muster (n): $s = 1 + 3 \cdot (n - 1)$

Umstellen ergibt: $s = 1 + 3 \cdot (n - 1) = 3 \cdot (n - 1) + 1$; das ist die **dritte Formel**.

Ausmultiplizieren der Klammer und Zusammenfassen des Terms ergibt:

$s = 3 \cdot (n - 1) + 1 = 3n - 3 + 1 = 3n - 2$; das ist die **erste Formel**.

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A2



Aufgabe 1:

Lösungsübersicht:

Zunächst sollte man im gleichschenkligen Dreieck ABD die Höhe h bezüglich der Seite $\overline{AB}$ einzeichnen und den Winkel α mit Hilfe der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC berechnen (siehe Figur 1).

Außerdem sollte man beachten, dass die Höhe h die Grundseite $\overline{AB}$ im gleichschenkligen Dreieck ABD halbiert (siehe Figur 2). Die Streckenlängen $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = 6,3$ cm sollte man auch in die Zeichnung eintragen.

- Für den **Umfang u des Dreiecks ABD** gilt: $u = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD}$

Mit $\overline{AD} = \overline{BD} = 6,3$ cm folgt sofort: $u = \overline{AB} + 2 \cdot 6,3 \text{ cm} = \overline{AB} + 12,6 \text{ cm}$. Man muss also noch die Strecke $\overline{AB}$ berechnen. Deren Hälfte $\overline{AM}$ kann im markierten Dreieck der Figur 2 mit der Kosinusfunktion berechnet werden.

- Für den **Flächeninhalt des Dreiecks ABD** gilt: $A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$

Die Strecke $\overline{AB}$ wurde bereits im ersten Aufgabenteil berechnet. Die Höhe h kann mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3).

Der Umfang des Dreiecks ABD:

Für den Umfang u des Dreiecks ABD gilt (siehe Figur 1): $u = \overline{AB} + 2 \cdot 6,3 \text{ cm} = \overline{AB} + 12,6 \text{ cm}$

→ Berechnung der Strecke $\overline{AB}$:

Für die Strecke $\overline{AB}$ gilt (siehe Figur 1): $\overline{AB} = 2 \overline{AM}$

Man beachte: Die Höhe h halbiert die Seite $\overline{AB}$, weil das Dreieck ABD gleichschenkelig ist mit $\overline{AD} = \overline{BD}$.

Die Strecke $\overline{AM}$ kann im Dreieck AMD mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel α kennt (siehe Figur 1).

Der Winkel α kann mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 1):

$$\alpha + 90^\circ + 41,8^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 131,8^\circ = 180^\circ \quad | -131,8^\circ$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 48,2^\circ$$

Im Dreieck AMD gilt dann (siehe Figur 2):

$$\cos 48,2^\circ = \frac{\overline{AM}}{6,3} \quad | \cdot 6,3$$

$$\Leftrightarrow 6,3 \cdot \cos 48,2^\circ = \overline{AM}$$

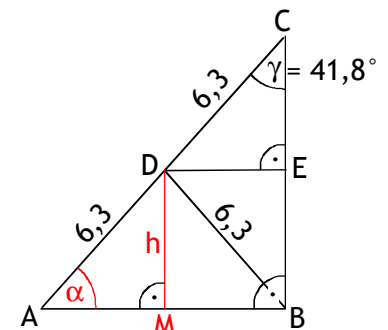
$$\Leftrightarrow 4,2 = \overline{AM} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AM} = 4,20 \text{ cm}$$

Für $\overline{AB} = 2 \overline{AM}$ folgt damit: $\overline{AB} = 8,40 \text{ cm}$

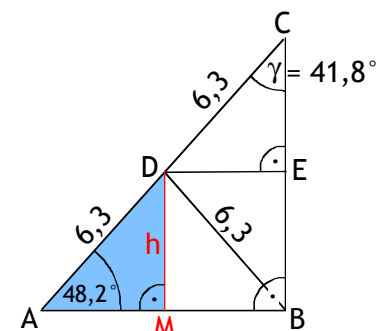
Für den Umfang $u = \overline{AB} + 12,6 \text{ cm}$ des Dreiecks ABD erhält man damit:

$$u = 8,4 \text{ cm} + 12,6 \text{ cm} = 21,0 \text{ cm}$$

Ergebnis: Das Dreieck ABD hat den Umfang $u = 21,0 \text{ cm}$.



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A2



Der Flächeninhalt des Dreiecks ABD:

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABD gilt (siehe Figur 3): $A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$

Mit $\overline{AB} = 8,40 \text{ cm}$ (siehe oben) folgt: $A_{ABD} = 4,20 \cdot h$

→ Berechnung der Höhe h:

Die Höhe h kann im Dreieck AMD mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Darin gilt:

$$\sin 48,2^\circ = \frac{h}{6,3} \quad | \cdot 6,3$$

$$\Leftrightarrow 6,3 \cdot \sin 48,2^\circ = h$$

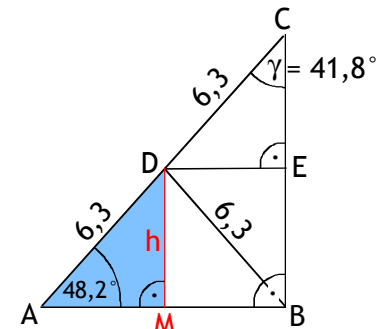
$$\Leftrightarrow 4,70 = h \text{ bzw. } h = 4,70 \text{ cm}$$

(Hinweis: Mit $\overline{AD} = 6,3 \text{ cm}$ und $\overline{AM} = 4,20 \text{ cm}$ kann man die Höhe h auch mit dem Satz des Pythagoras berechnen: $6,3^2 = h^2 + 4,20^2$)

Mit $h = 4,70 \text{ cm}$ erhält man für den Flächeninhalt des Dreiecks ABD:

$$A_{ABD} = 4,20 \text{ cm} \cdot 4,70 \text{ cm} = 19,74 \text{ cm}^2$$

Ergebnis: Das Dreieck ABD hat den Flächeninhalt $A_{ABD} = 19,74 \text{ cm}^2$.



Figur 3

Aufgabe 2:

Lösungsübersicht:

Die Schnittfläche A_S setzt sich aus einem **Rechteck** und einem **Dreieck** zusammen (siehe Figur 1).

Für deren Flächeninhalte gilt: $A_R = a \cdot h_2$ (Rechteck) und $A_D = \frac{1}{2} a \cdot h_1$ (Dreieck)

Die Kante a und die Höhe h_1 können in zwei rechtwinkligen Dreiecken einer quadratischen Pyramide berechnet werden (siehe Figuren 2 und 3). Die Höhe h_2 erhält man mit $h_{\text{ges}} = h_1 + h_2 = 20,6 \text{ cm}$.

Der Flächeninhalt der Schnittfläche A_S :

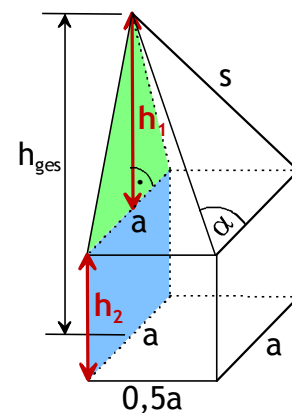
Die Schnittfläche A_S setzt sich aus einem **Rechteck** und einem **Dreieck** zusammen (siehe Figur 1).

Für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt: $A_R = a \cdot h_2$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt: $A_D = \frac{1}{2} a \cdot h_1$

• Berechnung der Kante a:

Die Kante a kann in dem markierten Dreieck der Figur 2 mit der Kosinusfunktion berechnet werden. Man beachte dabei, dass das Seitendreieck einer quadratischen Pyramide gleichschenkelig ist. Die Seitenhöhe h_s halbiert daher die Kante a. Außerdem sind die beiden Basiswinkel gleich groß: $\alpha = 68,9^\circ$.



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A2



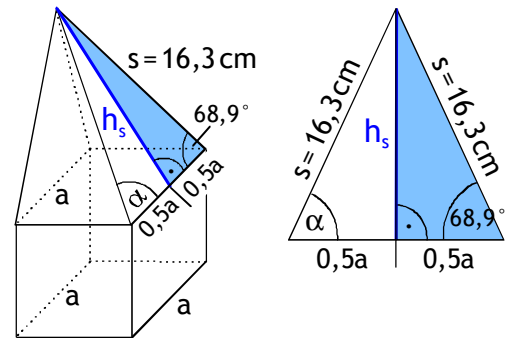
Es gilt (siehe Figur 2):

$$\cos 68,9^\circ = \frac{0,5a}{16,3} \quad | \cdot 16,3$$

$$\Leftrightarrow 5,87 = 0,5a \quad | \text{Vertauschen der Seiten}$$

$$\Leftrightarrow 0,5a = 5,87 \quad | : 0,5$$

$$\Leftrightarrow a = 11,74 \text{ cm}$$



Figur 2

• Berechnung der Höhe h_1 :

Die Höhe h_1 kann in dem markierten Dreieck der Figur 3 mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Seitenhöhe h_s kennt. Es gilt (siehe Figur 3):

$$h_1^2 + (0,5a)^2 = h_s^2$$

Mit $a = 11,74 \text{ cm}$ erhält man: $h_1^2 + 34,457 = h_s^2$

Die Seitenhöhe h_s wiederum kann in dem markierten Dreieck der Figur 2 mit der Sinusfunktion berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 2):

$$\sin 68,9^\circ = \frac{h_s}{16,3} \quad | \cdot 16,3$$

$$\Leftrightarrow 15,21 = h_s \text{ bzw. } h_s = 15,21 \text{ cm}$$

Einsetzen von $h_s = 15,21 \text{ cm}$ in $h_1^2 + 34,457 = h_s^2$ ergibt:

$$h_1^2 + 34,457 = 15,21^2$$

$$\Leftrightarrow h_1^2 + 34,457 = 231,344 \quad | -34,457$$

$$\Leftrightarrow h_1^2 = 196,89 \quad | \sqrt{}$$

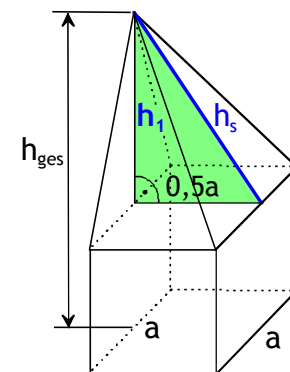
$$\Rightarrow h_1 = 14,03 \text{ cm}$$

• Berechnung der Höhe h_2 :

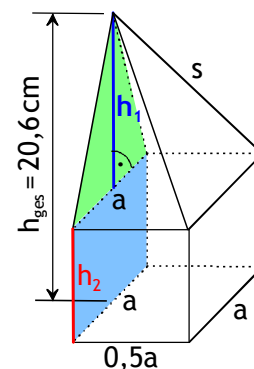
Aus $h_{\text{ges}} = h_1 + h_2 = 20,6 \text{ cm}$ erhält man mit $h_1 = 14,03 \text{ cm}$:

$$14,03 \text{ cm} + h_2 = 20,6 \text{ cm} \quad | -14,03 \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow h_2 = 6,57 \text{ cm}$$



Figur 3



Figur 4

Mit $a = 11,74 \text{ cm}$ und $h_2 = 6,57 \text{ cm}$ folgt für den Flächeninhalt des **Rechtecks** $A_R = a \cdot h_2$:

$$A_R = 77,13 \text{ cm}^2$$

Mit $a = 11,74 \text{ cm}$ und $h_1 = 14,03 \text{ cm}$ folgt für den Flächeninhalt des **Dreiecks** $A_D = \frac{1}{2} a \cdot h_1$:

$$A_D = 82,36 \text{ cm}^2$$

Für den Flächeninhalt der Schnittfläche $A_S = A_R + A_D$ erhält man somit:

$$A_S = 77,13 \text{ cm}^2 + 82,36 \text{ cm}^2 = 159,49 \text{ cm}^2 \approx 159,5 \text{ cm}^2$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt der Schnittfläche A_S beträgt $A_S = 159,5 \text{ cm}^2$.

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A2



Aufgabe 3:

Die Lösung des Gleichungssystems:

Zunächst muss man beide Gleichungen vereinfachen:

$\begin{aligned} (1) \quad 3(x - y) &= y + 8 \\ \Leftrightarrow 3x - 3y &= y + 8 & -y \\ \Leftrightarrow 3x - 4y &= 8 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (2) \quad 3y &= \frac{x-5}{2} & \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 6y &= x - 5 & -x \\ \Leftrightarrow -x + 6y &= -5 \end{aligned}$
--	--

Lösen des Gleichungssystems mit dem Additionsverfahren:

Das Gleichungssystem lautet nun:

$$(1) \quad 3x - 4y = 8$$

$$(2) \quad -x + 6y = -5$$

Addiert man zu Gleichung (1) das 3-fache von Gleichung (2), fällt die x-Variable heraus und man erhält:

$$(1): \quad 3x - 4y = 8$$

$$(2): \quad -x + 6y = -5 \quad | \cdot 3$$

$$(1): \quad 3x - 4y = 8$$

$$3 \cdot (2): \quad -3x + 18y = -15$$

$$(1) + 3 \cdot (2): \quad 14y = -7$$

Umstellen der Gleichung $14y = -7$ ergibt:

$$14y = -7 \quad | :14$$

$$\Leftrightarrow y = -0,5$$

Einsetzen von $y = -0,5$ in die Gleichung (1): $3x - 4y = 8$ ergibt:

$$3x - 4 \cdot (-0,5) = 8$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 = 8 \quad | -2$$

$$\Leftrightarrow 3x = 6 \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Ergebnis: Das Gleichungssystem hat die Lösung $x = 2$ und $y = -0,5$ bzw. $IL = \{2; -0,5\}$.

Hinweise:

Man kann das Gleichungssystem auch mit dem Gleichsetzungs- oder Einsetzungsverfahren lösen.

- Beim Gleichsetzungsverfahren muss man beide Gleichungen nach einer Variablen umstellen und dann beide Terme gleichsetzen. Zum Beispiel: (1) $x = \frac{8+4y}{3}$ und (2) $x = 6y + 5$. Aus der Gleichung $\frac{8+4y}{3} = 6y + 5$ kann man dann den y-Wert berechnen.

- Beim Einsetzungsverfahren muss man eine Gleichung nach einer Variablen umstellen und dann den entsprechenden Term in die andere Gleichung einsetzen. Zum Beispiel erhält man durch Einsetzen von Gleichung (2): $x = 6y + 5$ in die Gleichung (1): $3x - 4y = 8$ die Gleichung $3 \cdot (6y + 5) - 4y = 8$. Daraus kann dann der y-Wert berechnet werden.



Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A2

Aufgabe 4:

Die Funktionsgleichung der Parabel p:

Dem Schaubild entnimmt man, dass die Parabel p durch die beiden Punkte P(1|0) und Q(7|0) geht. Einsetzen der Koordinaten von P(1|0) und Q(7|0) in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$\text{Mit P(1|0): } 0 = 1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow 0 = 1 + 1b + c \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit Q(7|0): } 0 = 7^2 + b \cdot 7 + c \Leftrightarrow 0 = 49 + 7b + c \quad (\text{II})$$

$$(II) - (I) \text{ ergibt*}: 0 = 48 + 6b$$

* Wenn man Gleichung (II) minus Gleichung (I) „von unten nach oben“ rechnet, erspart man sich negative Werte.

Umstellen der Gleichung $0 = 48 + 6b$ nach b ergibt:

$$0 = 48 + 6b \quad | -6b$$

$$\Leftrightarrow -6b = 48 \quad | :(-6)$$

$$\Leftrightarrow b = -8$$

Einsetzen von $b = -8$ in die Gleichung (I) $0 = 1 + 1b + c$ ergibt:

$$0 = 1 + 1 \cdot (-8) + c$$

$$\Leftrightarrow 0 = 1 - 8 + c$$

$$\Leftrightarrow 0 = -7 + c \quad | +7$$

$$\Leftrightarrow 7 = c \text{ bzw. } c = 7$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Parabel p lautet also: $y = x^2 - 8x + 7$.

Alternative Lösungsmöglichkeit:

Wenn man zwei Nullstellen x_1 und x_2 einer nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabel kennt, kann man die Parabelgleichung mit dem **Nullstellenansatz** $p: y = (x - x_1)(x - x_2)$ sofort hinschreiben. Mit den Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 7$ der Parabel p (siehe Schaubild) erhält man:

$$y = (x - 1) \cdot (x - 7) = x^2 - 7x - 1x + 7 = x^2 - 8x + 7 \quad (\text{siehe oben})$$

Die Schnittpunkte A und B der Geraden g mit der Parabel p:

Zunächst muss man die Gleichung der Geraden g aufstellen:

Mit der angegebenen Steigung $m = -2$ lautet die unvollständige Gleichung der Geraden g: $y = -2x + c$.

Da der Punkt T(0|2) auf der Geraden g liegen soll, kann man c durch Einsetzen der Koordinaten von T(0|2) in $y = -2x + c$ berechnen. Man erhält:

$$2 = -2 \cdot 0 + c$$

$$\Leftrightarrow 2 = 0 + c$$

$$\Leftrightarrow 2 = c \text{ bzw. } c = 2$$

Die Funktionsgleichung der Geraden g lautet also: $y = -2x + 2$.

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A2



Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte A und B:

Gleichsetzen der Gleichung $g: y = -2x + 2$ mit der Parabelgleichung $p: y = x^2 - 8x + 7$ ergibt:

$$-2x + 2 = x^2 - 8x + 7 \quad | +2x - 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 6x + 5 \quad | \text{Vertauschen beider Seiten}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ und $b = -6$, $c = 5$ erhält man:

$$x_1 = 3 + \sqrt{3^2 - 5} = 3 + \sqrt{4} = 5 \quad \text{und} \quad x_2 = 3 - \sqrt{3^2 - 5} = 3 - \sqrt{4} = 1$$

Das sind die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte $A(5|y_A)$ und $B(1|y_B)$.

Die y-Koordinaten erhält man durch Einsetzen von $x_1 = 5$ bzw. $x_2 = 1$ in die Gleichung von g oder in die Gleichung von p .

$$\text{Einsetzen von } x_1 = 5 \text{ in } y = -2x + 2 \text{ ergibt: } y = -2 \cdot 5 + 2 = -8 \Rightarrow y_A = -8 \Rightarrow A(5|-8)$$

$$\text{Einsetzen von } x_2 = 1 \text{ in } y = -2x + 2 \text{ ergibt: } y = -2 \cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow y_B = 0 \Rightarrow B(1|0)$$

Ergebnis: Die Schnittpunkte A und B sind $A(5|-8)$ und $B(1|0)$.

(Hinweis: Die Bezeichnungen „A“ und „B“ können auch vertauscht werden.)

Aufgabe 5:

Die Wahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse:

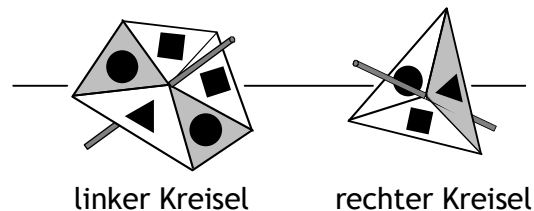
Zunächst muss man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Symbole auf den beiden Kreiseln angeben, wenn man einen Kreisel 1-mal dreht. Dabei erhält man:

Linker Kreisel:

$$P_L(\bullet) = \frac{2}{5} ; \quad P_L(\blacktriangle) = \frac{1}{5} ; \quad P_L(\blacksquare) = \frac{2}{5} ; \quad P_L(\text{grau}) = \frac{2}{5}$$

Rechter Kreisel:

$$P_R(\bullet) = \frac{1}{3} ; \quad P_R(\blacktriangle) = \frac{1}{3} ; \quad P_R(\blacksquare) = \frac{1}{3} ; \quad P_R(\text{grau}) = \frac{1}{3}$$



Die Wahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse können dann mit der Summen- und der Produktregel berechnet werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} \rightarrow P(\text{zwei gleiche Symbole}) &= P(\bullet; \bullet) + P(\blacktriangle; \blacktriangle) + P(\blacksquare; \blacksquare) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx 33,3\% \end{aligned}$$

$$\rightarrow P(\text{Kreis und Dreieck}) = P(\bullet; \blacktriangle) + P(\blacktriangle; \bullet) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 20\%$$

→ Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{höchstens ein graues Feld})$ kann man einfacher über das Gegenereignis „zwei graue Felder“ berechnen. Denn es gilt:

$$P(\text{höchstens ein graues Feld}) = 1 - P(\text{zwei graue Felder})$$

$$\text{Mit } P(\text{zwei graue Felder}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \text{ erhält man: } P(\text{höchstens ein graues Feld}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15} \approx 86,7\%$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse sind: $P(\text{zwei gleiche Symbole}) = \frac{1}{3} \approx 33,3\%$;

$$P(\text{Kreis und Dreieck}) = \frac{1}{5} = 20\% \text{ und } P(\text{höchstens ein graues Feld}) = \frac{13}{15} \approx 86,7\%.$$

Lösungen zur Prüfung 2023: Pflichtteil A2



Aufgabe 6:

Der prozentuale Zuwachs der Onlinewerbung von 2020 zu 2021:

Im Jahr 2020 wurden **7484 Mio. Euro** für Onlinewerbung ausgegeben.

Das ist der Grundwert $G = 7484$ Mio. €.

Im Jahr 2021 waren es **7789 Mio. Euro**. Das ist der erhöhte Grundwert $G_+ = 7789$ Mio. €.

Einsetzen der Werte von $G = 7484$ Mio. € und $G_+ = 7789$ Mio. € in die Formel $G_+ = G \cdot q_+$ ergibt:

$$7789 = 7484 \cdot q_+ \quad | : 7484$$

$$\Leftrightarrow 1,0408 = q_+ \text{ bzw. } q_+ = 1,0408$$

$$\text{Mit } q_+ = 1 + \frac{p}{100} \text{ folgt: } p \% = 4,08 \%$$

Ergebnis: Die Ausgaben für Onlinewerbung haben zwischen 2020 und 2021 um 4,08 % zugenommen.

Die Ausgaben für Bannerwerbung im Jahr 2019:

Die Ausgaben für Bannerwerbung im Jahr 2019 sind der gesuchte Grundwert G . Die Ausgaben für Bannerwerbung im Jahr 2020 sind der erhöhte Grundwert $G_+ = 895$ Mio. € (siehe Diagramm).

Bei einer prozentualen Erhöhung um $p \% = 9,5 \%$ erhält man für den Wachstumsfaktor $q_+ = 1 + \frac{p}{100}$:

$$q_+ = 1 + \frac{9,5}{100} = 1,095. \text{ Einsetzen von } G_+ = 895 \text{ Mio. € und } q_+ = 1,095 \text{ in die Formel } G_+ = G \cdot q_+ \text{ ergibt:}$$

$$895 \text{ Mio. €} = G \cdot 1,095 \quad | : 1,095$$

$$\Leftrightarrow 817,35 \text{ Mio. €} = G \text{ bzw. } G = 817,35 \text{ Mio. €}$$

Ergebnis: Im Jahr 2019 wurden 817,35 Mio. € für Bannerwerbung ausgegeben.

Die voraussichtlichen Ausgaben für Social-Media-Werbung im Jahr 2026:

Der Grundwert sind nun die Ausgaben für Social-Media-Werbung im Jahr 2021. Also $G = 614$ Mio. € (siehe Diagramm). Die voraussichtlichen Ausgaben im Jahr 2026 sind der erhöhte Grundwert G_+ .

Bei einem jährlichen Zuwachs um $12,25 \%$ ist der jährliche Wachstumsfaktor $q_+ = 1 + \frac{12,25}{100} = 1,1225$.

Einsetzen von $G = 614$ Mio. € und $q_+ = 1,1225$ in die Formel $G_+ = G \cdot q_+^5$ ergibt:

$$G_+ = 614 \text{ Mio. €} \cdot 1,1225^5 = 1094,2 \text{ Mio. € im Jahr 2026.}$$

Ergebnis:

Die Ausgaben für Social-Media-Werbung wären bei einem jährlichen Zuwachs um $12,25 \%$ im Jahr 2026 auf 1094,2 Mio. € angestiegen.

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1a:

Lösungsübersicht:

Das Viereck FBGE ist ein Trapez. Für dessen Flächeninhalt gilt (siehe Figur 1):

$$A_{\text{FBGE}} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{FB} + \overline{EG}) \cdot h; \text{ mit } h = \overline{EF}$$

Für die Strecke $\overline{FB}$ gilt: $\overline{FB} = \overline{AF}$, weil das Dreieck ABC gleichschenkelig ist mit den Schenkeln $\overline{AC} = \overline{BC}$. Die Strecke $\overline{AF}$ kann im Dreieck AFC mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).

Die Höhe $h = \overline{EF}$ kann mit der Kosinusfunktion in dem rechtwinkligen Dreieck BHD berechnet werden, das man vorher noch einzeichnen muss (siehe Figur 2).

Die Strecke $\overline{EG}$ kann in dem Dreieck EGC mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{CE}$ kennt (siehe Figur 3). Für die Strecke $\overline{CE}$ gilt: $\overline{CE} = \overline{CF} - h$. Und die Strecke $\overline{CF}$ wiederum kann im Dreieck AFC mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 4).

Berechnung des Flächeninhalts des Trapezes FBGE:

Für den Flächeninhalt des Trapezes FBGE gilt:

$$A_{\text{FBGE}} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{FB} + \overline{EG}) \cdot h; \text{ mit } h = \overline{EF} \text{ (siehe Figur 1).}$$

→ Berechnung der Strecke $\overline{FB}$:

Der Punkt F ist die Mitte der Strecke $\overline{AB}$, weil das Dreieck ABC gleichschenkelig ist mit $\overline{AC} = \overline{BC}$. Es gilt also: $\overline{FB} = \overline{AF}$

Die Strecke $\overline{AF}$ kann im Dreieck AFC mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1). Darin gilt:

$$\sin 37,6^\circ = \frac{\overline{AF}}{11,4} \quad | \cdot 11,4$$

$$\Leftrightarrow 6,96 = \overline{AF} \text{ bzw. } \overline{AF} = 6,96 \text{ cm}$$

Damit ist auch $\overline{FB} = 6,96 \text{ cm}$.

→ Berechnung der Höhe $h = \overline{EF}$:

Zur Berechnung der Höhe $h = \overline{EF} = \overline{DH}$ muss man das Hilfsdreieck BHD einzeichnen (siehe Figur 2).

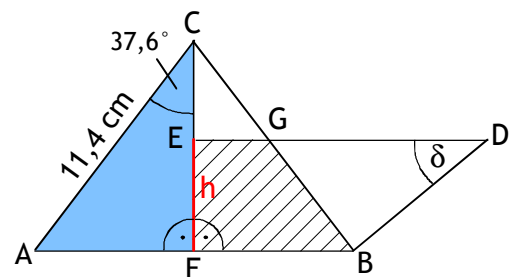
Für den Winkel δ_1 gilt: $\delta_1 = 90^\circ - 39,2^\circ = 50,8^\circ$

Mit der Kosinusfunktion erhält man:

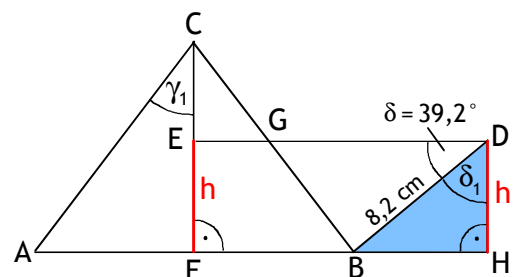
$$\cos 50,8^\circ = \frac{h}{8,2} \quad | \cdot 8,2$$

$$\Leftrightarrow 5,18 = h \text{ bzw. } h = 5,18 \text{ cm}$$

Und damit auch $\overline{EF} = 5,18 \text{ cm}$.



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W1



→ Berechnung der Strecke EG:

Die Strecke $\overline{EG}$ kann im Dreieck EGC mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel γ_2 und die Strecke $\overline{EC}$ kennt.

Es gilt (siehe Figur 3): $\tan \gamma_2 = \frac{\overline{EG}}{\overline{EC}}$

• Weil das Dreieck ABC gleichschenkelig ist mit $\overline{AC} = \overline{BC}$, gilt $\gamma_1 = \gamma_2$ (siehe Figur 3).

Mit $\gamma_1 = 37,6^\circ$ folgt $\gamma_2 = 37,6^\circ$.

• Für die Strecke $\overline{EC}$ gilt (siehe Figur 3):

$$\overline{EC} = \overline{FC} - 5,18 \text{ cm}$$

(Hinweis: Die Strecke $h = \overline{EF} = 5,18 \text{ cm}$ wurde bereits oben berechnet.)

Die Strecke $\overline{FC}$ kann im Dreieck AFC mit der Kosinusfunktion oder mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 4). Es gilt:

$$\cos 37,6^\circ = \frac{\overline{FC}}{11,4} \quad | \cdot 11,4$$

$$\Leftrightarrow 9,03 = \overline{FC} \quad \text{bzw.} \quad \overline{FC} = 9,03 \text{ cm}$$

Damit folgt für $\overline{EC} = \overline{FC} - 5,18 \text{ cm}$: $\overline{EC} = 3,85 \text{ cm}$

Einsetzen von $\gamma_2 = 37,6^\circ$ und $\overline{EC} = 3,85 \text{ cm}$ in $\tan \gamma_2 = \frac{\overline{EG}}{\overline{EC}}$ ergibt:

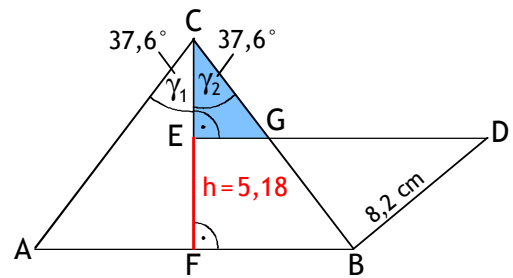
$$\tan 37,6^\circ = \frac{\overline{EG}}{3,85} \quad | \cdot 3,85$$

$$\Leftrightarrow 2,96 = \overline{EG} \quad \text{bzw.} \quad \overline{EG} = 2,96 \text{ cm}$$

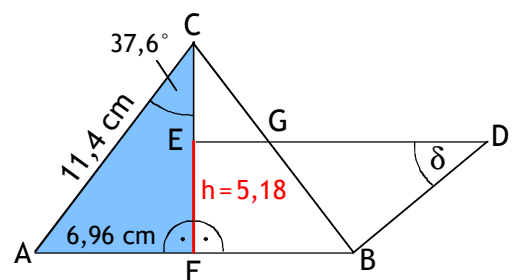
Einsetzen von $\overline{FB} = 6,96 \text{ cm}$, $\overline{EG} = 2,96 \text{ cm}$ und $h = 5,18 \text{ cm}$ in $A_{\text{FBGE}} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{FB} + \overline{EG}) \cdot h$ ergibt schließlich (Rechnung ohne die Einheit cm):

$$A_{\text{FBGE}} = \frac{1}{2} \cdot (6,96 + 2,96) \cdot 5,18 = \frac{1}{2} \cdot 9,92 \cdot 5,18 = 25,7 \text{ cm}^2$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Vierecks FBGE ist $A_{\text{FBGE}} = 25,7 \text{ cm}^2$.



Figur 3



Figur 4

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1b:

Die Funktionsgleichung der Parabel p:

Einsetzen der Koordinaten von A(1|1) in $y = x^2 + bx - 2$ ergibt:

$$1 = 1^2 + b \cdot 1 - 2$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1 + b - 2$$

$$\Leftrightarrow 1 = b - 1 \quad | +1$$

$$\Leftrightarrow 2 = b \text{ bzw. } b = 2$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Parabel p ist: $y = x^2 + 2x - 2$.

Die Koordinaten der Punkte B und C:

- Die y-Koordinate des Punktes B(-3|y_B) erhält man, indem man seine x-Koordinate $x = -3$ in die Funktionsgleichung p: $y = x^2 + 2x - 2$ einsetzt.

Man beachte dabei, dass man beim Einsetzen um negative Zahlen Klammern setzen muss !

$$\text{Man erhält: } y_B = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 2 = 9 - 6 - 2 = 1 \Rightarrow B(-3|1)$$

- Der Schnittpunkt C der Parabel p mit der y-Achse hat die x-Koordinate $x = 0$.

(Hinweis: Alle Punkte der y-Achse haben die x-Koordinate $x = 0$. Sonst lägen sie nicht auf der y-Achse.)

Einsetzen von $x = 0$ in $y = x^2 + 2x - 2$ ergibt:

$$y_C = 0^2 + 2 \cdot 0 - 2 = 0 + 0 - 2 = -2 \Rightarrow C(0|-2)$$

Ergebnis: Die Punkte B und C haben die Koordinaten B(-3|1) und C(0|-2).

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

Zunächst sollte man die Punkte A(1|1), B(-3|1) und C(0|-2) in ein Koordinatensystem eintragen und das Dreieck ABC zeichnen (siehe Figur 1).

Den Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann man mit der Formel

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} g \cdot h \text{ berechnen. Als Grundseite } g \text{ des Dreiecks ABC}$$

sollte man die Strecke $\overline{AB}$ nehmen.

Dem Schaubild entnimmt man (siehe Figur 1):

$$g = \overline{AB} = 4 \text{ LE und } h = 3 \text{ LE}$$

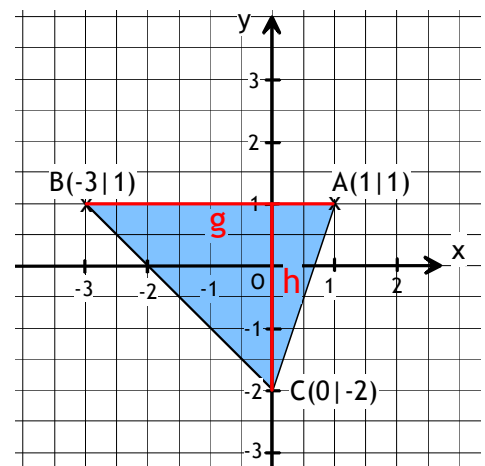
Einsetzen von $g = 4$ und $h = 3$ in $A_{ABC} = \frac{1}{2} g \cdot h$ ergibt:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ FE}$$

Ergebnis:

Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt $A_{ABC} = 6 \text{ FE}$.

(Hinweis: FE = Flächeneinheiten)



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W1



Die Funktionsgleichung der Geraden g:

Mit der angegebenen Steigung $m = -3$ lautet die unvollständige Gleichung der Geraden g: $y = -3x + c$. Da der Punkt $C(0|-2)$ auf der Geraden g liegen soll, kann man c durch Einsetzen der Koordinaten von $C(0|-2)$ in $y = -3x + c$ berechnen. Man erhält:

$$-2 = -3 \cdot 0 + c$$

$$\Leftrightarrow -2 = 0 + c$$

$$\Leftrightarrow -2 = c \text{ bzw. } c = -2$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Geraden g lautet: $y = -3x - 2$.

Die Behauptung von Julius:

Um die Behauptung von Julius überprüfen zu können, sollte man die Gerade g: $y = -3x - 2$ in das Schaubild einzeichnen und den Flächeninhalt des Dreiecks CAS berechnen (s. Figur 2).

Man beachte dabei, dass man die Höhe des Steigungsdreiecks von g nach unten zeichnen muss, weil $m = -3 = -\frac{3}{1}$ negativ ist. Der Zeichnung entnimmt man, dass die Gerade g die Seite AB im Punkt $S(-1|1)$ schneidet.

Den Flächeninhalt des Dreiecks CAS kann man mit der Formel

$$A = \frac{1}{2} g^* \cdot h \text{ berechnen. Als Grundseite } g^* \text{ des Dreiecks CAS}$$

sollte man die Strecke $\overline{AS}$ nehmen.

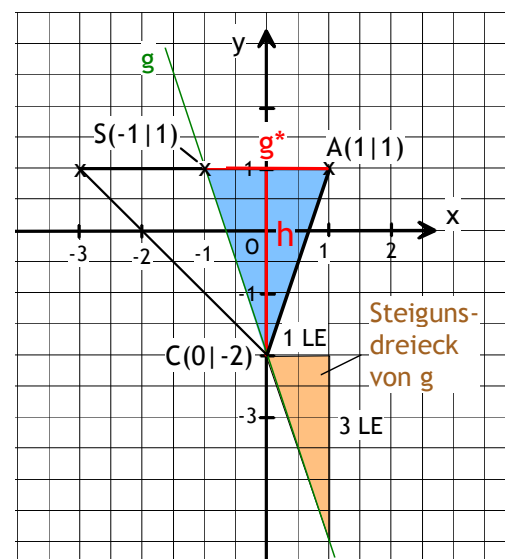
Dem Schaubild entnimmt man (siehe Figur 2):

$$g^* = \overline{AS} = 2 \text{ LE und } h = 3 \text{ LE}$$

Einsetzen von $g^* = 2$ und $h = 3$ in $A = \frac{1}{2} g^* \cdot h$ ergibt:

$$A^* = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3 \text{ FE. Dies ist die Hälfte von } A = 6 \text{ FE (siehe oben)}$$

Ergebnis: Julius hat recht.



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W2



Aufgabe W2a:

Die Funktionsgleichung der Parabel p_1 :

Der Wertetabelle entnimmt man, dass die Parabel p_1 durch die beiden Punkte $A(0|1)$ und $B(4|1)$ geht. Einsetzen der Koordinaten von $A(0|1)$ und $B(4|1)$ in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ ergibt ein Gleichungssystem, dessen Lösung die Werte für b und c sind:

$$\text{Mit } A(0|1): 1 = 0^2 + b \cdot 0 + c \Leftrightarrow 1 = c \Leftrightarrow c = 1 \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit } B(4|1): 1 = 4^2 + b \cdot 4 + c \Leftrightarrow 1 = 16 + 4b + c \quad (\text{II})$$

Einsetzen von $c = 1$ in die Gleichung (II) ergibt:

$$1 = 16 + 4b + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = 17 + 4b \quad | \text{ Vertauschen der Seiten}$$

$$\Leftrightarrow 17 + 4b = 1 \quad | -17$$

$$\Leftrightarrow 4b = -16 \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow b = -4$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Parabel p_1 lautet: $y = x^2 - 4x + 1$.

Die fehlenden y-Werte der Wertetabelle:

Die fehlenden y-Werte erhält man, indem man die x-Werte jeweils in die Gleichung der Parabel p_1 : $y = x^2 - 4x + 1$ einsetzt. Man beachte dabei: Negative Zahlen muss man beim Einsetzen einklammern.

$$\text{Einsetzen von } x = -1 \text{ in } y = x^2 - 4x + 1 \text{ ergibt: } y = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 1 = 1 + 4 + 1 = 6$$

$$\text{Einsetzen von } x = 1 \text{ in } y = x^2 - 4x + 1 \text{ ergibt: } y = 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 1 - 4 + 1 = -2$$

$$\text{Einsetzen von } x = 2 \text{ in } y = x^2 - 4x + 1 \text{ ergibt: } y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$$

$$\text{Einsetzen von } x = 3 \text{ in } y = x^2 - 4x + 1 \text{ ergibt: } y = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$$

$$\text{Einsetzen von } x = 5 \text{ in } y = x^2 - 4x + 1 \text{ ergibt: } y = 5^2 - 4 \cdot 5 + 1 = 25 - 20 + 1 = 6$$

Die vollständige Wertetabelle ist also:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

Die Funktionsgleichung der Geraden g:

Durch Einsetzen der Koordinaten von $P(3|-5)$ in g: $y = mx - 2$ erhält man:

$$-5 = m \cdot 3 - 2$$

$$\Leftrightarrow -5 = 3m - 2 \quad | +2$$

$$\Leftrightarrow -3 = 3m \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow -1 = m \text{ bzw. } m = -1$$

Ergebnis:

Die Funktionsgleichung der Geraden g lautet: $y = -1x - 2$ bzw. $y = -x - 2$.

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W2



Der Nachweis, dass g keinen Schnittpunkt mit p_1 hat:

Gleichsetzen der Gleichung g: $y = -x - 2$ mit der Parabelgleichung p_1 : $y = x^2 - 4x + 1$ ergibt:

$$-x - 2 = x^2 - 4x + 1 \quad | +x + 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 3x + 3 \quad | \text{Vertauschen beider Seiten}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$$

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ und $b = -3$, $c = 3$ erhält man:

$$x_{1,2} = -\frac{(-3)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 3} = 1,5 \pm \sqrt{(1,5)^2 - 3} = 1,5 \pm \sqrt{2,25 - 3} = 1,5 \pm \sqrt{-0,75}$$

Weil die Diskriminante (= Zahl unter der Wurzel) negativ ist, gibt es keine Lösungen - und damit auch keine Schnittpunkte zwischen g und p_1 .

Fehlerhinweis: In der Lösungsübersicht des Hefts „Realschule 2027“ muss es auf Seite 38 (unter der Aufgabe W2 zum Wahlteil B - 2023) statt „Determinante“ natürlich „Diskriminante“ heißen.

Die Funktionsgleichung einer Parabel p_2 , die keinen Schnittpunkt mit g und mit p_1 hat:

Um die Lage einer Parabel p_2 mit der gewünschten Eigenschaft einschätzen zu können, muss man von der Geraden g und der Parabel p_1 ein Schaubild erstellen.

• Schaubild von g:

Die Gerade g hat den y-Achsenabschnitt $c = -2$ und die Steigung $m = -1$. Mit Hilfe eines Steigungsdreiecks kann man das Schaubild von g erstellen (siehe Figur 1).

• Schaubild der Parabel p_1 :

Um das Schaubild der Parabel p_1 : $y = x^2 - 4x + 1$ erstellen zu können, benötigt man die Koordinaten ihres Scheitelpunkts S_1 . Mit einer quadratischen Ergänzung von $y = x^2 - 4x + 1$ erhält man:

$$y = x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 2^2 + 1 - 2^2 \quad | \text{zweite binomische Formel}$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 2)^2 + 1 - 4$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 2)^2 - 3$$

Dieser Scheitelform entnimmt man: $S_1(2|-3)$

Wenn die Parabel p_2 keinen Schnittpunkt mit der Parabel p_1 haben soll, muss ihr Scheitelpunkt S_2 auf der **senkrechten Achse** der Parabel p_1 liegen (siehe Figur 1). Die x-Koordinate von S_2 muss also $x = 2$ sein: $S_2(2|y_2)$.

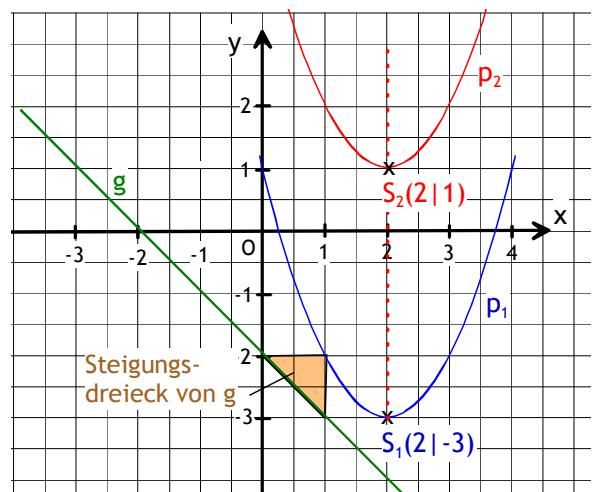
Gleichzeitig muss der Scheitelpunkt S_2 oberhalb der Geraden g liegen, damit die nach oben geöffnete Parabel p_2 auch mit der Geraden g keinen Schnittpunkt hat. Mögliche Koordinaten für S_2 sind also $S_2(2|1)$ (siehe Figur 1).

Einsetzen der Koordinaten von $S_2(2|1)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ ergibt:

$$y = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$$

Ergebnis: Eine mögliche Gleichung für die Parabel p_2 ist $y = x^2 - 4x + 5$ bzw. $y = (x - 2)^2 + 1$.

(Hinweis: Alle möglichen Lösungen sind $y = (x - 2)^2 + k$; mit $k > -3,25$.)



Figur 1



Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W2

Aufgabe W2b:

Lösungsübersicht:

- Für die **Mantelfläche des Kegels** gilt die Formel $M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r \cdot s$. Der Radius r des Grundkreises kann in einem gleichschenkligen Dreieck des regelmäßigen Fünfecks mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1 und 2). Mit der bekannten Kegelhöhe $h_K = 15,2$ cm kann dann die Seitenkante s mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 3).
- Für die **Mantelfläche der Pyramide** gilt die Formel $M_{\text{Pyr}} = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s$ (siehe Figur 4). Die Seitenhöhe h_s kann mit $h_p = 7,6$ cm und dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Höhe h_a kennt (siehe Figur 5). Die Höhe h_a ist die Höhe eines der 5 Dreiecke des regelmäßigen Fünfecks und kann in dem markierten Dreieck der Figur 6 berechnet werden.

Der Flächeninhalt des Mantels des Kegels:

Für die **Mantelfläche des Kegels** gilt die Formel $M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r \cdot s$.

Der Radius r des Grundkreises kann in einem gleichschenkligen Dreieck des regelmäßigen Fünfecks berechnet werden (siehe Figur 1 und 2). Man beachte dazu, dass die Höhe h_a die Grundseite a und den Winkel bei M halbiert (siehe Figur 2). Dieser Winkel ist in einem regelmäßigen Fünfeck $360^\circ : 5 = 72^\circ$.

Es gilt (siehe Figur 2): $\sin 36^\circ = \frac{0,5a}{r}$. Mit $a = 8,6$ cm erhält man:

$$\sin 36^\circ = \frac{4,3}{r} \quad | \cdot r$$

$$\Leftrightarrow r \cdot \sin 36^\circ = 4,3 \quad | : \sin 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow r = 7,32 \text{ cm}$$

Die Seitenkante s kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Im markierten Dreieck der Figur 3 gilt: $s^2 = r^2 + h_K^2$

Mit $r = 7,32$ cm und $h_K = 15,2$ cm folgt:

$$s^2 = 7,32^2 + 15,2^2$$

$$\Leftrightarrow s^2 = 284,62 \quad | \sqrt{}$$

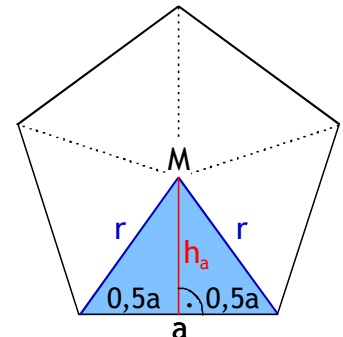
$$\Rightarrow s = 16,87 \text{ cm}$$

Mit $r = 7,32$ cm und $s = 16,87$ cm erhält man schließlich für die Mantelfläche $M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r \cdot s$ des Kegels:

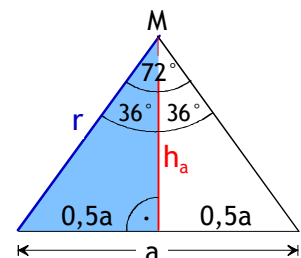
$$M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot 7,32 \text{ cm} \cdot 16,87 \text{ cm} = 387,95 \text{ cm}^2$$

Teilergebnis:

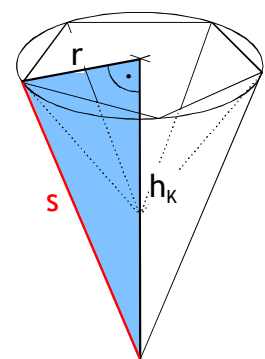
Der Mantel des Kegels hat den Flächeninhalt $M_{\text{Kegel}} = 387,95 \text{ cm}^2$.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W2



Der Flächeninhalt des Mantels der Pyramide:

Für die **Mantelfläche der Pyramide** gilt die Formel $M_{\text{Pyr}} = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s$.

Eines der 5 Dreiecke der Mantelfläche ist in Figur 4 markiert mit der Grundseite $a = 8,6 \text{ cm}$ und der Höhe h_s .

Die Höhe h_s kann mit dem Satz des Pythagoras in dem markierten rechtwinkligen Dreieck der Figur 5 berechnet werden.

Darin gilt: $h_s^2 = h_a^2 + h_p^2$

Die Pyramidenhöhe h_p ist bereits angegeben: $h_p = 7,6 \text{ cm}$

Die **Höhe h_a** kann mit dem Satz des Pythagoras oder der Kosinusfunktion in dem markierten rechtwinkligen Dreieck der Figur 6 berechnet werden (siehe auch Figur 1 und 2). Darin gilt:

$$h_a^2 + 4,3^2 = 7,32^2$$

$$\Leftrightarrow h_a^2 + 18,49 = 53,58 \quad | -18,49$$

$$\Leftrightarrow h_a^2 = 35,09 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow h_a = 5,92 \text{ bzw. } h_a = 5,92 \text{ cm}$$

Einsetzen von $h_p = 7,6 \text{ cm}$ und $h_a = 5,92 \text{ cm}$ in $h_s^2 = h_a^2 + h_p^2$ ergibt:

$$h_s^2 = 5,92^2 + 7,6^2$$

$$\Leftrightarrow h_s^2 = 92,81 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow h_s = 9,63 \text{ cm}$$

Einsetzen von $a = 8,6 \text{ cm}$ und $h_s = 9,63 \text{ cm}$ in $M_{\text{Pyr}} = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s$ ergibt schließlich:

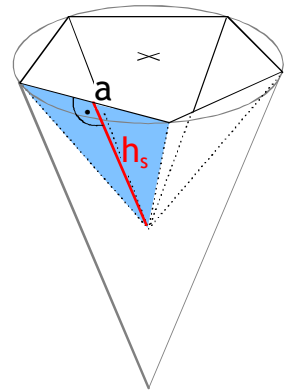
$$M_{\text{Pyr}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,6 \text{ cm} \cdot 9,63 \text{ cm} = 207,05 \text{ cm}^2$$

Teilergebnis:

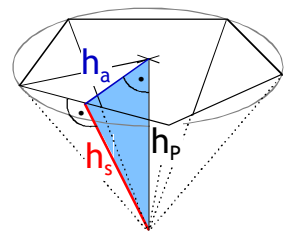
Der Mantel der Pyramide hat den Flächeninhalt $M_{\text{Pyr}} = 207,05 \text{ cm}^2$.

Ergebnis:

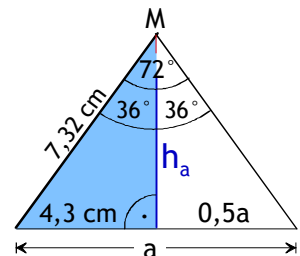
Die Differenz zwischen der Mantelfläche $M_{\text{Kegel}} = 387,95 \text{ cm}^2$ des Kegels und der Mantelfläche $M_{\text{Pyr}} = 207,05 \text{ cm}^2$ der Pyramide ist somit $\Delta M = 387,95 \text{ cm}^2 - 207,05 \text{ cm}^2 = 180,9 \text{ cm}^2$.



Figur 4



Figur 5



Figur 6

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W3



Aufgabe W3a:

Lösungsübersicht:

- Die Wahrscheinlichkeit, **eine Zahl größer als 60** freizurubbeln, hängt nur von der freigerubbelten Zahl des linken Streifens ab (Zehnerziffer). Wenn dort nämlich eine „6“ erscheint, ist die Zahl immer größer als 60 - unabhängig davon, welche Zahl auf dem rechten Streifen (Einerziffer) freigerubbelt wird.
- Zur Berechnung des **Erwartungswerts** benötigt man dann noch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „die Zahl 33“. Dieses Ereignis tritt ein, wenn auf beiden Streifen die Zahl „3“ erscheint. Diese Wahrscheinlichkeit kann mit der Produktregel berechnet werden.
- Den **neuen Gewinn** beim Austausch einer „3“ durch eine „6“ berechnet man genau so wie den Erwartungswert im obigen Aufgabenteil - nur eben mit den neuen Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ziffern auf beiden Streifen:



Die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu erhalten, die größer als 60 ist:

Die Wahrscheinlichkeit, **eine Zahl größer als 60** freizurubbeln, hängt nur von der freigerubbelten Zahl des linken Streifens ab. Wenn dort als Zehnerziffer eine „6“ erscheint, ist die Zahl immer größer als 60. Denn eine „0“ kommt auf dem rechten Streifen (Einerziffer) nicht vor.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man auf dem linken Streifen eine „6“ freirubbelt, ist: $P_L(6) = \frac{1}{5} = 20\%$

(Hinweis: Von 5 Ziffern ist eine Ziffer eine „6“.)

Ergebnis:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die freigerubbelte Zahl größer als 60 ist, ist $P(\text{Zahl} > 60) = \frac{1}{5} = 20\%$.

Berechnung des Erwartungswerts (aus Sicht eines Spielers):

Für den Erwartungswert E aus Sicht eines Spielers gilt:

$$E = P(> 60) \cdot 3,00 \text{ €} + P(\text{Zahl } 33) \cdot 6,00 \text{ €} - 2,00 \text{ €}$$

$$\text{Mit } P(> 60) = \frac{1}{5} \text{ (siehe oben) folgt: } E = \frac{1}{5} \cdot 3,00 \text{ €} + P(\text{Zahl } 33) \cdot 6,00 \text{ €} - 2,00 \text{ €}$$

Man benötigt also noch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Zahl 33“. Dieses Ereignis tritt ein, wenn auf beiden Streifen die Ziffer 3 freigerubbelt wird. Die Wahrscheinlichkeit $P(3; 3)$ kann man mit der Produktregel berechnen:

$$P(\text{Zahl } 33) = P(3; 3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 16\%$$

$$\text{Einsetzen von } P(\text{Zahl } 33) = \frac{4}{25} \text{ in } E = \frac{1}{5} \cdot 3,00 \text{ €} + P(\text{Zahl } 33) \cdot 6,00 \text{ €} - 2,00 \text{ €} \text{ ergibt:}$$

$$E = \frac{1}{5} \cdot 3,00 \text{ €} + \frac{4}{25} \cdot 6,00 \text{ €} - 2,00 \text{ €} = 0,60 \text{ €} + 0,96 \text{ €} - 2,00 \text{ €} = -0,44 \text{ €}$$

Ergebnis:

Der Erwartungswert beträgt aus Sicht eines Spielers **-0,44 €**. Umgekehrt kann die Klasse mit einem durchschnittlichen Gewinn von 0,44 € pro Los rechnen.

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W3



Der neue Gewinn, wenn auf jedem Streifen eine „3“ durch eine „6“ ersetzt wird:

Für den neuen Erwartungswert E_{neu} gilt (aus Sicht eines Spielers):

$$E_{\text{neu}} = P_{\text{neu}}(> 60) \cdot 3,00 \text{ €} + P_{\text{neu}}(\text{Zahl 33}) \cdot 6,00 \text{ €} - 2,00 \text{ €}$$



Die Wahrscheinlichkeit $P_{\text{neu}}(> 60)$ beträgt mit den neuen Ziffern:

$$P_{\text{neu}}(> 60) = \frac{2}{5}$$

neue Ziffern, wenn eine „3“ durch eine „6“ ersetzt wird.

Die Wahrscheinlichkeit $P_{\text{neu}}(\text{Zahl 33})$ ist $P_{\text{neu}}(\text{Zahl 33}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$.

Damit folgt für den neuen Erwartungswert E_{neu} (aus Sicht eines Spielers):

$$E_{\text{neu}} = \frac{2}{5} \cdot 3,00 \text{ €} + \frac{1}{25} \cdot 6,00 \text{ €} - 2,00 \text{ €} = -0,56 \text{ €}$$

Das heißt, der durchschnittliche Verlust für einen Spieler erhöht sich. Somit macht umgekehrt die Klasse auf lange Sicht mehr Gewinn.

Ergebnis:

Wenn die Klasse auf jedem Streifen eine „3“ durch eine „6“ ersetzt, erhöht sich ihr Gewinn; nämlich durchschnittlich von +0,44 € pro Los auf +0,56 € pro Los.

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W3



Aufgabe W3b:

Lösungsübersicht:

- Um eine **Funktionsgleichung der Parabel** aufstellen zu können, muss man die Flugbahn des Frosches in einem Koordinatensystem skizzieren. Dabei muss man beachten, dass der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel auf der y-Achse liegt, damit man sie mit einer Funktionsgleichung der Art $y = ax^2 + c$ beschreiben kann. Die Wasseroberfläche sollte auf Höhe der x-Achse verlaufen (siehe Figur 1). Mit Hilfe der angegebenen Höhe und Weite des Sprungs kann man die Koordinaten des Scheitelpunkts und der Nullstellen in diesem Koordinatensystem angeben. Damit kann dann die Parabelgleichung aufgestellt werden.
- Um den vertikalen **Abstand des Frosches** vom Schilfrohr zu bestimmen, muss man die Koordinaten des Parabelpunktes kennen, wo sich der Frosch über dem Schilfrohr befindet. Die x-Koordinate dieses Punktes kann man mit dem horizontalen Abstand 150 cm des Schilfrohrs und den Koordinaten der Nullstellen der Parabel berechnen (siehe Figur 2). Die y-Koordinate dieses Punktes erhält man, indem man seine x-Koordinate in die bereits berechnete Funktionsgleichung der Parabel $y = ax^2 + c$ einsetzt.
- Um die **Sprungweiten des beiden Frösche** miteinander vergleichen zu können, muss man noch die Sprungweite des zweiten Frosches bestimmen. Dazu benötigt man die Nullstellen der Gleichung $y = -\frac{3}{200}x^2 + 165$ (siehe Figur 3).

Eine mögliche Funktionsgleichung für die Flugbahn des Frosches:

Zunächst muss man in einem Koordinatensystem eine Skizze der Parabel erstellen, die die Flugbahn des Frosches beschreibt (siehe Figur 1). Diese Parabel sollte symmetrisch zur y-Achse verlaufen, sodass man die Parabel mit der allgemeinen Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben kann. Außerdem sollte sich der Absprungpunkt des Frosches auf der x-Achse befinden.

Der Scheitelpunkt der Parabel hat in diesem Koordinatensystem die Koordinaten $S(0 | 139)$, da die maximale Höhe des Sprungs 139 cm ist.

Daraus erhält man sofort den entsprechenden c-Wert: $c = 139$.

Die unvollständige Parabelgleichung lautet somit: $y = ax^2 + 139$

Den fehlenden a-Wert kann man nun mit Hilfe einer der beiden Nullstellen berechnen. Weil der Frosch 220 cm weit springt und die Parabel symmetrisch zur y-Achse verläuft, folgt (siehe Figur 1):

$N_1(-110 | 0)$ und $N_2(110 | 0)$; (Hinweis: Es ist $220 \text{ cm} : 2 = 110 \text{ cm}$)

Einsetzen der Koordinaten von $N_2(110 | 0)$ in die Gleichung $y = ax^2 + 139$ ergibt:

$$0 = a \cdot 110^2 + 139$$

$$\Leftrightarrow 0 = a \cdot 12100 + 139 \quad | -139$$

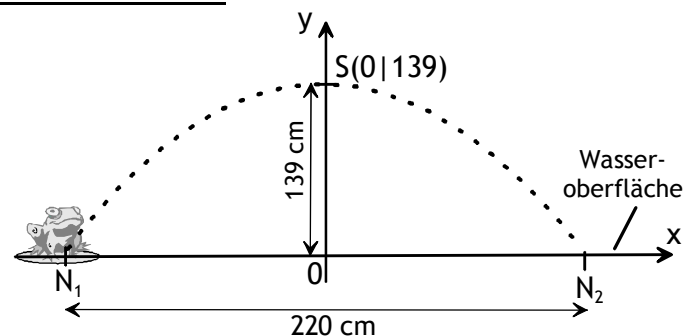
$$\Leftrightarrow -139 = a \cdot 12100 \quad | : 12100$$

$$\Leftrightarrow -0,0115 = a \text{ bzw. } a = -0,0115$$

Damit lautet die Parabelgleichung im gewählten Koordinatensystem: $y = -0,0115x^2 + 139$

(Hinweis: Man hätte auch die Koordinaten von $N_1(-110 | 0)$ in $y = ax^2 + 139$ einsetzen können.)

Ergebnis: Eine Gleichung der Parabel zur Beschreibung des Sprungs ist $y = -0,0115x^2 + 139$.



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W3



Der Abstand des Froschs vom Schilfrohr:

Der **Punkt P** sei der Punkt auf der Parabel, wo sich der Frosch genau über dem Schilfrohr befindet. Die Spitze des Schilfrohrs werde durch den **Punkt R** beschrieben. Der gesuchte Abstand d des Froschs vom Schilfrohr ist dann die Differenz der y -Koordinaten der Punkte P und R (siehe Figur 2).

Die x -Koordinaten der Punkte R und P kann man mit der Entfernung des Schilfrohrs zum Absprungpunkt $N_1(-110|0)$ berechnen (siehe Figur 2).

Man erhält: $x_R = x_P = 40$ ($= 150 - 110$)

Die y -Koordinate des Punktes R ist $y_R = 94$, weil das Schilfrohr laut Aufgabentext 94 cm aus dem Wasser ragt. Somit ist **$R(40|94)$** .

Die y -Koordinate des Punktes $P(40|y_P)$ erhält man, indem man $x_P = 40$ in die Funktionsgleichung $y = -0,0115x^2 + 139$ einsetzt:

$y_P = -0,0115 \cdot 40^2 + 139 = -18,4 + 139 = 120,6$. Somit ist **$P(40|120,6)$** .

Der gesuchte Abstand ist also **$d = 120,6 \text{ cm} - 94 \text{ cm} = 26,6 \text{ cm}$**

Ergebnis: Der Frosch springt in einem Abstand von **26,6 cm** über das Schilfrohr.

Hinweis:

Wenn man mit der Funktionsgleichung $y = -0,011x^2 + 139$ rechnet, erhält man den Abstand $d = 27,4 \text{ cm}$.

Die Differenz der Sprungweiten der beiden Frösche:

Die Sprungweite des zweiten Frosches kann man mit den Nullstellen der Parabel $y = -\frac{3}{200}x^2 + 165$ berechnen (siehe Figur 3).

Mit dem Ansatz $-\frac{3}{200}x^2 + 165 = 0$ erhält man:

$$-\frac{3}{200}x^2 + 165 = 0 \quad | -165$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{200}x^2 = -165 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{200}x^2 = 165 \quad | : \frac{3}{200}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 11000 \quad | \pm \sqrt{}$$

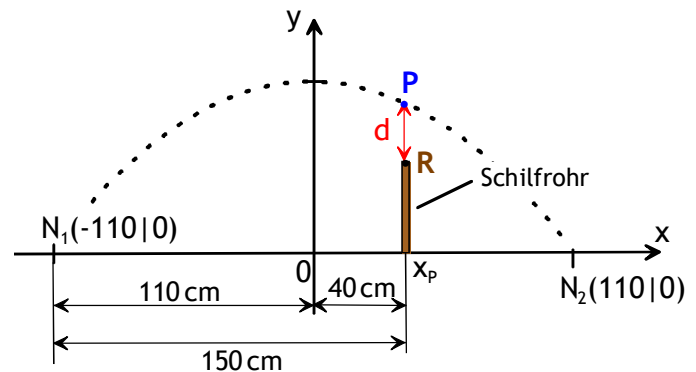
$$\Rightarrow x_1 = -104,9 \text{ und } x_2 = +104,9$$

Die Sprungweite des zweiten Frosches beträgt somit (siehe Figur 3):

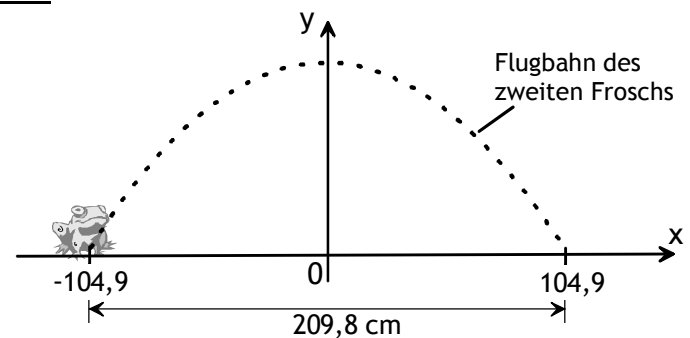
$104,9 \text{ cm} - (-104,9 \text{ cm}) = 209,8 \text{ cm} \approx 210 \text{ cm}$. Das sind ca. **10 cm** ($= 220 \text{ cm} - 210 \text{ cm}$) weniger als die Sprungweite des ersten Froschs ($= 220 \text{ cm}$).

Ergebnis:

Der **erste Frosch** springt weiter. Die Sprungweiten der beiden Frösche unterscheiden sich um ca. **10 cm**.



Figur 2



Figur 3



Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W4

Aufgabe W4a:

Lösungsübersicht:

• Die **Funktionsgleichung von p_1** hat die allgemeine Form $y = ax^2 + c$. Der Wert von c ist die y-Koordinate des Scheitelpunkts S_1 und kann direkt im Schaubild abgelesen werden.

Die **Funktionsgleichung von g** hat die allgemeine Form $y = mx + c$. Der y-Achsenabschnitt c kann ebenfalls sofort im Schaubild abgelesen werden. Zur Bestimmung der Steigung m muss man noch ein Steigungsdreieck einzeichnen (siehe Figur 1).

• Die Koordinaten des **Punktes N_1** können im Schaubild abgelesen werden. Weil die Parabel $y = ax^2 + c$ symmetrisch zur y-Achse ist, muss der **Punkt N_2** symmetrisch zum Punkt N_1 sein. Alternativ kann man die beiden Nullstellen auch berechnen, indem man in der Funktionsgleichung von p_1 für $y = 0$ setzt.

• Die **Koordinaten des Scheitelpunkts S_2** der Parabel p_2 kann man bestimmen, indem man die Gleichung von p_2 : $y = x^2 - 2x - 3$ mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung in eine Scheitelform umwandelt.

• Für die Berechnung der **Flächeninhalte der Dreiecke $S_2S_1N_1$ und $S_2N_2S_1$** benötigt man die Formel $A = \frac{1}{2} g \cdot h$. Wichtig zur Berechnung ist dabei, dass man jedes Dreieck in einen Teil oberhalb der x-Achse und in einen Teil unterhalb der x-Achse unterteilt (siehe Figur 2). Die Grundseiten dieser Dreiecke sind die Strecken $\overline{N_1T}$ und $\overline{TN_2}$ (siehe Figur 2). Der Punkt T ist der Schnittpunkt der Linie S_1S_2 mit der x-Achse. Dessen x-Koordinate kann mit dem zweiten Strahlensatz oder mit Hilfe eines Steigungsdreiecks bestimmt werden (siehe Figur 3). Die Dreieckshöhen h_1 und h_2 können im Schaubild abgelesen werden.

Die Funktionsgleichungen von p_1 und g :

• Die **Funktionsgleichung der Parabel p_1** hat die allgemeine Form $y = ax^2 + c$. Der Wert von c ist die y-Koordinate des Scheitelpunkts $S_1(0|4)$ also $c = 4$. Die unvollständige Parabelgleichung lautet somit: $y = ax^2 + 4$. Den fehlenden a -Wert kann man nun mit Hilfe der Nullstelle $N_1(-4|0)$ berechnen.

Einsetzen der Koordinaten von $N_1(-4|0)$ in die Gleichung $y = ax^2 + 4$ ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot (-4)^2 + 4 \\ \Leftrightarrow 0 &= a \cdot 16 + 4 \quad | -4 \\ \Leftrightarrow -4 &= a \cdot 16 \quad | : 16 \\ \Leftrightarrow -0,25 &= a \quad \text{bzw.} \quad a = -0,25 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ergebnis: Damit lautet die Parabelgleichung p_1 : $y = -0,25x^2 + 4$ bzw. $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

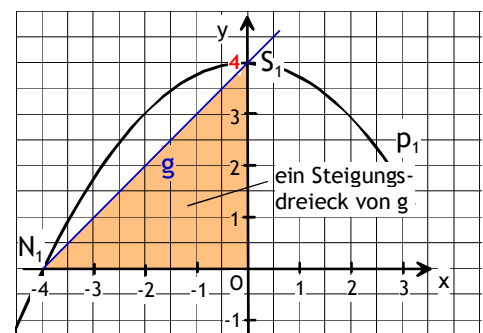
• Die **Funktionsgleichung der Geraden g** hat die allgemeine Form $y = mx + c^*$. Der Wert des y-Achsenabschnitts c^* kann im Schaubild abgelesen werden: $c^* = 4$.

Die Steigung m kann man mit Hilfe eines Steigungsdreiecks bestimmen (siehe Figur 1). Man erhält: $m = \frac{4}{4} = 1$.

Ergebnis:

Damit lautet die Funktionsgleichung der Geraden g : $y = 1x + 4$.

(Hinweis: Man kann zur Berechnung von m auch die Koordinaten von $N_1(-4|0)$ in die unvollständige Gleichung $y = m \cdot x + 4$ einsetzen.)



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W4



Die Koordinaten von N_2 :

Weil alle Parabeln der Form $y = ax^2 + c$ symmetrisch zur y-Achse verlaufen, muss die Lage der zweiten Nullstelle N_2 **symmetrisch** zur ersten Nullstelle $N_1(-4|0)$ sein.

Ergebnis: Die Koordinaten von N_2 sind also **$N_2(4|0)$** .

Alternativ kann man auch die Schnittpunkte von $p_2: y = -0,25x^2 + 4$ mit der x-Achse *berechnen*. Das wäre hier aber unnötig aufwändig. Man erhält dabei:

$$\begin{aligned} -0,25x^2 + 4 &= 0 & | -4 \\ \Leftrightarrow -0,25x^2 &= -4 & | :(-0,25) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 16 & | \pm\sqrt{} \\ \Rightarrow x_1 &= -4 \text{ und } x_2 = +4 \end{aligned}$$

Aus $x_1 = -4$ folgt die Nullstelle $N_1(-4|0)$. Aus $x_2 = +4$ folgt die Nullstelle $N_2(4|0)$.

Die Koordinaten des Scheitelpunkts S_2 :

Um die Koordinaten des Scheitelpunkts von $p_2: y = x^2 - 2x - 3$ bestimmen zu können, muss man die Gleichung $y = x^2 - 2x - 3$ in eine Scheitelform umwandeln.

Mit einer quadratischen Ergänzung von $y = x^2 - 2x - 3$ erhält man:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x - 3 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 - 2x + 1^2 - 3 - 1^2 & | \text{Anwenden der 2. binomischen Formel} \\ \Leftrightarrow y &= (x - 1)^2 - 3 - 1 \\ \Leftrightarrow y &= (x - 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

Dieser Scheitelform entnimmt man: **$S_2(1|-4)$**

Ergebnis: Der Scheitelpunkt der Parabel p_2 ist **$S_2(1|-4)$** .

Die Flächeninhalte der Dreiecke $S_2S_1N_1$ und $S_2N_2S_1$ und deren Unterschied:

- Das **Dreieck $S_2S_1N_1$** setzt sich aus dem oberen Teil N_1TS_1 und dem unteren Teil N_1S_2T zusammen (siehe Figur 2). Beide Dreiecke haben die gleiche **Grundseite g_1** und die gleiche Höhe $h = h_1 = h_2 = 4 \text{ LE}$.

Mit der Formel für eine Dreiecksfläche erhält man somit:

$$A(S_2S_1N_1) = \frac{1}{2} g_1 \cdot h_1 + \frac{1}{2} g_1 \cdot h_2. \text{ Und mit } h_1 = h_2 = 4 \text{ LE:}$$

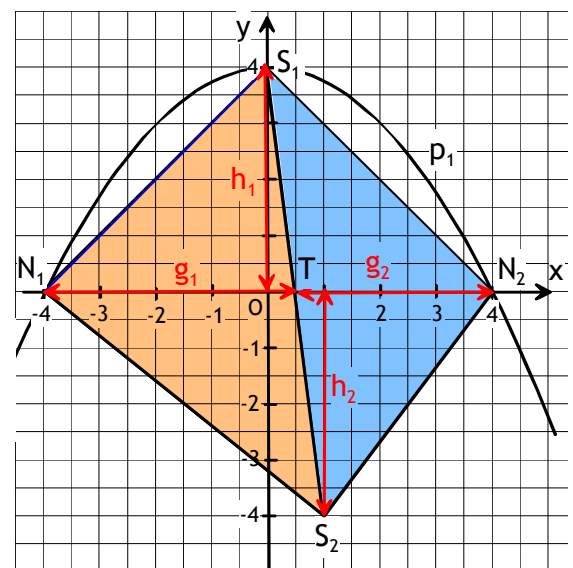
$$A(S_2S_1N_1) = \frac{1}{2} g_1 \cdot 4 + \frac{1}{2} g_1 \cdot 4 = 2g_1 + 2g_1 = 4g_1$$

- Das **Dreieck $S_2N_2S_1$** setzt sich aus dem oberen Teil TN_2S_1 und dem unteren Teil S_2N_2T zusammen (siehe Figur 2). Beide Dreiecke haben die gleiche **Grundseite g_2** und die gleiche Höhe $h = h_1 = h_2 = 4 \text{ LE}$.

Mit der Formel für eine Dreiecksfläche erhält man somit:

$$A(S_2N_2S_1) = \frac{1}{2} g_2 \cdot h_2 + \frac{1}{2} g_2 \cdot h_1. \text{ Und mit } h_1 = h_2 = 4 \text{ LE:}$$

$$A(S_2N_2S_1) = \frac{1}{2} g_2 \cdot 4 + \frac{1}{2} g_2 \cdot 4 = 2g_2 + 2g_2 = 4g_2$$



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W4



Zur Berechnung der Strecken g_1 und g_2 benötigt man die x-Koordinate des Punktes T(t |0).

Mit dem **zweiten Strahlensatz** (Zentrum bei S_1) gilt (siehe Figur 3):

$$\frac{1}{t} = \frac{8}{4} \quad | \text{ überkreuz multiplizieren}$$

$$\Leftrightarrow 4 = 8t \quad | : 8$$

$$\Leftrightarrow 0,5 = t \text{ bzw. } t = 0,5$$

Alternativ kann die x-Koordinate von T auch mit dem Steigungsdreieck zwischen S_1 und S_2 bestimmt werden, das die Steigung $m = -\frac{1}{8}$ hat. Wenn man dann von S_2 aus um 1 Kästchen nach links und um 8 Kästchen nach oben geht, kommt man auf den Punkt T(0,5|0).

Mit der x-Koordinate $t = 0,5$ des Punktes T(0,5|0) folgt nun für die Strecken g_1 und g_2 (siehe Figur 4):

$$g_1 = 4 + 0,5 = 4,5 \text{ LE}$$

$$g_2 = 4 - 0,5 = 3,5 \text{ LE}$$

Einsetzen von $g_1 = 4,5 \text{ LE}$ in $A(S_2S_1N_1) = 4g_1$ ergibt:

$$A(S_2S_1N_1) = 4 \cdot 4,5 = 18 \text{ FE}$$

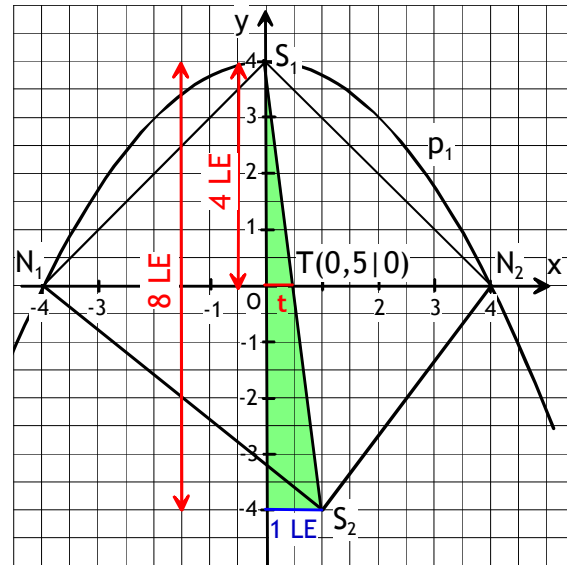
Einsetzen von $g_2 = 3,5 \text{ LE}$ in $A(S_2N_2S_1) = 4g_2$ ergibt:

$$A(S_2N_2S_1) = 4 \cdot 3,5 = 14 \text{ FE}$$

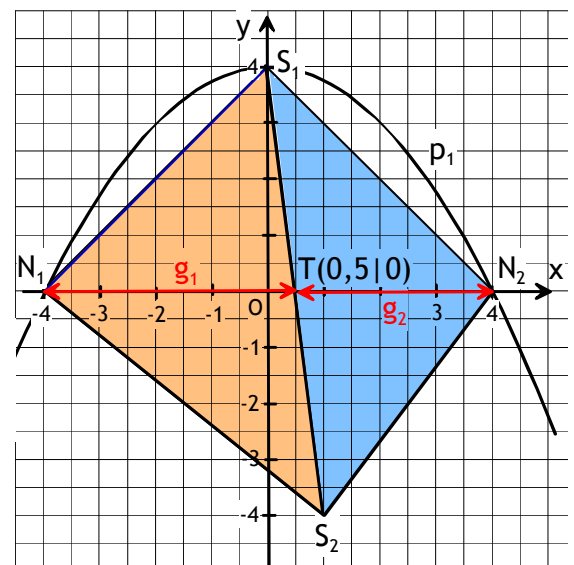
Der Unterschied beider Flächeninhalte ist somit $\Delta A = 18 \text{ FE} - 14 \text{ FE} = 4 \text{ FE}$.

Ergebnis:

Die Flächeninhalte der beiden Dreiecke unterscheiden sich um **4 FE**.



Figur 3



Figur 4

Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W4



Aufgabe W4b:

Lösungsübersicht:

Für die Höhe des Prismas gilt: $h_{\text{Prisma}} = \overline{AR} + \overline{RT}$; mit $\overline{AR} = 14,2 \text{ cm}$.

Die Strecke $\overline{RT}$ kann mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck RTS berechnet werden, wenn man die Kantenlänge a und die Strecke $\overline{RS}$ kennt (siehe Figur 2). Die Kantenlänge $a = \overline{ST} = \overline{AQ}$ kann im Dreieck RAQ mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

Die Strecke $\overline{RS}$ kann mit der Länge des Streckenzugs $\overline{PQRS} = 38 \text{ cm}$ bestimmt werden. Es gilt:

$$\overline{RS} = \overline{PQRS} - \overline{PQ} - \overline{QR} \quad \text{bzw.} \quad \overline{RS} = 38 \text{ cm} - \overline{PQ} - \overline{QR}$$

Die Strecke $\overline{QR}$ kann im Dreieck RAQ mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

Die Strecke $\overline{PQ}$ erhält man mit der Länge a und der Sinusfunktion in einem Dreieck des regelmäßigen Achtecks (siehe Figur 3 und 4).

Die Höhe des achtseitigen Prismas:

Für die Höhe des Prismas gilt (siehe Figur 1): $h_{\text{Prisma}} = 14,2 \text{ cm} + \overline{RT}$

Die Strecke $\overline{RT}$ kann im rechtwinkligen Dreieck RST mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Strecken a und $\overline{RS}$ kennt. Darin gilt (siehe Figur 2):

$$\overline{RT}^2 + a^2 = \overline{RS}^2; \quad \text{mit } a = \overline{ST}$$

→ Berechnung der Strecke a :

Die Strecke $a = \overline{ST}$ bzw. $a = \overline{AQ}$ kann im Dreieck RAQ mit der Tangensfunktion berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 2):

$$\tan 23^\circ = \frac{a}{14,2} \quad | \cdot 14,2$$

$$\Leftrightarrow 6,03 = a \quad \text{bzw.} \quad a = 6,03 \text{ cm}$$

→ Berechnung der Strecke $\overline{RS}$:

Die Strecke $\overline{RS}$ kann mit der Länge des Streckenzugs

$\overline{PQRS} = 38,0 \text{ cm}$ bestimmt werden. Es gilt:

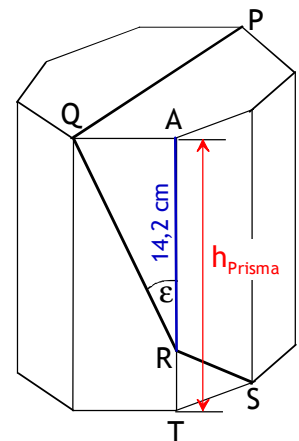
$$\overline{RS} = 38,0 \text{ cm} - \overline{PQ} - \overline{QR}$$

- Die Strecke $\overline{QR}$ kann im Dreieck RAQ mit der Kosinusfunktion berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 2):

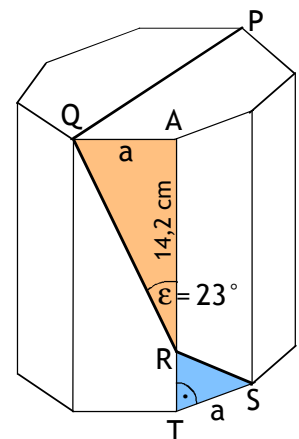
$$\cos 23^\circ = \frac{14,2}{\overline{QR}} \quad | \cdot \overline{QR}$$

$$\Leftrightarrow \overline{QR} \cdot \cos 23^\circ = 14,2 \quad | : \cos 23^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{QR} = 15,43 \text{ cm}$$



Figur 1



Figur 2



Lösungen zur Prüfung 2023: Wahlbereich - Aufgabe W4

- Die Hälfte der Strecke $\overline{PQ}$ kann in einem gleichschenkligen Dreieck des regelmäßigen Achtecks berechnet werden. Es gilt (siehe Figur 3): $\overline{PQ} = 2r$

Man beachte dazu, dass die **Höhe** h_a die Grundseite a und den Winkel bei M halbiert (siehe Figur 3 und 4). Dieser Winkel ist in einem regelmäßigen Achteck $360^\circ : 8 = 45^\circ$.

Die Strecke r kann mit der Sinusfunktion berechnet werden. Es gilt (siehe Figur 4):

$$\sin 22,5^\circ = \frac{0,5a}{r} \quad (\text{Hinweis: Es ist } 22,5^\circ = 45^\circ : 2.)$$

Mit $a = 6,03 \text{ cm}$ folgt:

$$\sin 22,5^\circ = \frac{3,015}{r} \quad | \cdot r$$

$$\Leftrightarrow r \cdot \sin 22,5^\circ = 3,015 \quad | : \sin 22,5^\circ$$

$$\Leftrightarrow r = 7,88 \text{ cm}$$

Für $\overline{PQ} = 2r$ folgt damit: $\overline{PQ} = 15,76 \text{ cm}$

Einsetzen von $\overline{PQ} = 15,76 \text{ cm}$ und $\overline{QR} = 15,43 \text{ cm}$ in $\overline{RS} = 38,0 \text{ cm} - \overline{PQ} - \overline{QR}$ ergibt:

$$\overline{RS} = 38,0 \text{ cm} - 15,76 \text{ cm} - 15,43 \text{ cm} = 6,81 \text{ cm}$$

Einsetzen von $a = 6,03 \text{ cm}$ und $\overline{RS} = 6,81 \text{ cm}$ in $\overline{RT}^2 + a^2 = \overline{RS}^2$ ergibt:

$$\overline{RT}^2 + 6,03^2 = 6,81^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{RT}^2 + 36,36 = 46,38 \quad | -36,36$$

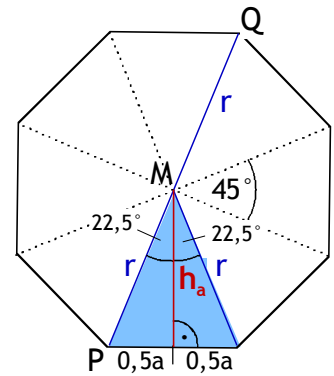
$$\Leftrightarrow \overline{RT}^2 = 10,02 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \overline{RT} = 3,17 \text{ cm}$$

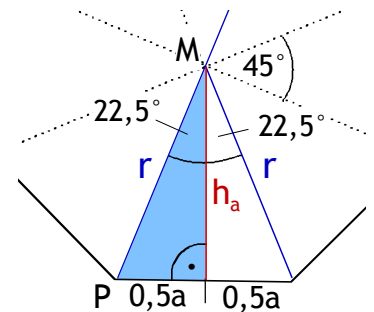
Mit $\overline{AR} = 14,2 \text{ cm}$ und $\overline{RT} = 3,17 \text{ cm}$ folgt schließlich für die Prismenhöhe $h_{\text{Prisma}} = \overline{AR} + \overline{RT}$:

$$h_{\text{Prisma}} = 17,37 \text{ cm}$$

Ergebnis: Die Höhe des achtseitigen Prismas ist $h_{\text{Prisma}} = 17,37 \text{ cm}$.



Figur 3



Figur 4