

Tipps und Tricks für die Abschlussprüfung

Rechentipps und Lösungsstrategien mit Beispielen zu allen Prüfungsthemen

Mathematik
Baden-Württemberg

Hinweise zum Copyright:

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und nur für die eigene Nutzung zugelassen. Kopieren und Vervielfältigen der vorliegenden Datei ist verboten ! Jede Nutzung in anderen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags.

Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung vervielfältigt oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Ausgenommen von diesen Regelungen ist die **Verwendung für folgende Unterrichtszwecke:**

So dürfen Lehrkräfte alle Dateien der CD zu Unterrichtszwecken ausdrucken, mit elektronischen Projektionsverfahren (wie Laptop und Beamer) einsetzen und von allen Dateien OHP-Folien erstellen. Verboten ist allerdings die Weitergabe der Dateien auf elektronischen Datenträgern.

Verstöße werden strafrechtlich verfolgt !

© Mathematik-Verlag 2026, Mosbach

Mathematik-Verlag Rainer Hild
Steige 44-2
74821 Mosbach
<https://matheverlag.com> E-Mail: info@matheverlag.com



Vorwort:

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die folgenden Kapitel möchten Ihnen wertvolle Tipps und Tricks vermitteln, um die Prüfungsaufgaben in Mathematik möglichst erfolgreich bearbeiten zu können.

Jedes Kapitel beginnt mit den wichtigsten Regeln und Kenntnissen zum jeweiligen Thema. Diese Regeln und Kenntnisse sollten Sie unbedingt „draufhaben“. Die dabei erwähnten Formeln können Sie selbstverständlich auch in der Formelsammlung nachschlagen. Für den neuen Pflichtteil A1 müssen Sie allerdings auch einige Formeln und Regeln auswendig wissen. Welche Formeln dies sind, finden Sie in der Datei <Formelwissen für A1.pdf>.

Im Anschluss an jeden Regelkasten wird anhand einer typischen Prüfungsaufgabe Schritt für Schritt ein Lösungsweg vorgestellt. Die einzelnen Schritte sind dabei so ausführlich beschrieben, dass Sie den Lösungsweg sicher mühelos nachvollziehen können.

Zu Ihrer Orientierung noch ein paar Anmerkungen zu folgenden Symbolen:



Diese Regeln und Kenntnisse sollten Sie sich einprägen.



Die Glühbirne weist auf Tipps, wertvolle Rechentricks und typische Stolperfallen hin.



In den durch das Taschenrechner-Symbol gekennzeichneten Kästen stehen Tipps zum Umgang mit dem Taschenrechner.

Inhaltsverzeichnis:

1. Algebra

1.1. Rechnen mit Potenzen	4
1.2. Rechnen mit Wurzeln	5
1.3. Terme und binomische Formeln	6
1.4. Gleichungssysteme und ihre Lösung	7
1.5. Quadratische Gleichungen	9
1.6. Bruchgleichungen	10
1.7. Lineare Funktionen	11
1.8. Quadratische Funktionen	14
1.9. Der Abstand zweier Punkte	19
1.10. Tipps für Parabelaufgaben	20

2. Stereometrie

2.1. Kegel und Zylinder	21
2.2. Kugel und Halbkugel	23
2.3. Quadratische Pyramide	24
2.4. Fünfseitige Pyramide	26

3. Trigonometrie

3.1. Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken	28
3.2. Berechnungen in Trapezen	30
3.3. Berechnungen in Vielecken	31
3.4. Sinus und Kosinus im Einheitskreis	34
3.5. Exkurs: Die Strahlensätze	36

4. Sachrechnen

4.1. Zinseszins	38
4.2. Ratensparen	41
4.3. Zinsrechnen	43
4.4. Erhöhter und verringerter Grundwert	44
4.5. Prozentrechnen	46

5. Daten erfassen

5.1. Beschreibung statistischer Daten	48
5.2. Absolute und relative Häufigkeiten	48
5.3. Schwerpunkte von Häufigkeitsverteilungen	49
5.4. Boxplots	49

6. Wahrscheinlichkeitsrechnung

6.1. Zufall und Wahrscheinlichkeit - die Laplace Formel	50
6.2. Zweistufige Zufallsexperimente, Baumdiagramm und Pfadregel	51
6.3. Berechnung des Erwartungswerts	53

1. Algebra

1.1. Rechnen mit Potenzen:

- Die **Potenzschreibweise**: $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (Produkt mit n Faktoren „a“)
In a^n heißt a die Grundzahl oder Basis und n die Hochzahl oder der Exponent.

- **Erstes Potenzgesetz** (gleiche Basis): $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ und $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

- **Zweites Potenzgesetz** (gleiche Hochzahlen):

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \text{ und } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{ und rückwärts: } (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \text{ und } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- **Drittes Potenzgesetz** (Potenzieren von Potenzen): $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

- **Spezialfälle**: $1^n = 1$ und $a^0 = 1$



← **Merke**

Beispiel 1: Schreiben Sie die Zahl jeweils als Potenz: a) 16 b) 64 c) 25 d) 27 e) 81

Lösung: a) $16 = 2^4$ b) $64 = 2^6$ c) $25 = 5^2$ d) $27 = 3^3$ e) $81 = 3^4$

Tipp: Folgende Potenzen zu den Grundzahlen 2; 3 und 5 sollte man auswendig wissen:

$$8 = 2^3; \quad 16 = 2^4; \quad 32 = 2^5; \quad 64 = 2^6; \quad 27 = 3^3; \quad 81 = 3^4; \quad 25 = 5^2; \quad 125 = 5^3$$

Außerdem sollte man alle Quadratzahlen bis 100 auswendig wissen: 4; 9; 16; 25; 36; ...



Beispiel 2: Fassen Sie zusammen soweit wie möglich: a) $3^4 \cdot 3^2$ b) $8 \cdot 2^5$ c) $5^4 \cdot 25$ d) $\frac{2^6}{16}$

Lösung: a) $3^4 \cdot 3^2 = 3^6$ b) $8 \cdot 2^5 = 2^3 \cdot 2^5 = 2^8$ c) $5^4 \cdot 25 = 5^4 \cdot 5^2 = 5^6$ d) $\frac{2^6}{16} = \frac{2^6}{2^4} = 2^2 = 4$

Beispiel 3: Zerlegen Sie die Grundzahl in Primfaktoren und schreiben Sie als Produkt zweier Potenzen:

a) 15^4 b) 6^5 c) 10^4

Lösung:

a) $15^4 = (3 \cdot 5)^4 = 3^4 \cdot 5^4$ b) $6^5 = (2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$ c) $10^4 = (2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$

- Für **Potenzen mit negativer Hochzahl** gilt: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$



← **Merke**

Beispiel 4: Schreiben Sie folgende Terme so um, dass nur positive Hochzahlen vorkommen:

a) 7^{-2} b) $3^{-4} \cdot 2^3$ c) $2^{-5} \cdot 5^{-2}$

Lösung:

a) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ b) $3^{-4} \cdot 2^3 = \frac{2^3}{3^4}$ c) $2^{-5} \cdot 5^{-2} = \frac{1}{2^5 \cdot 5^2}$

- **Dezimalzahlen wie 0,1; 0,001 und 0,0 ... 01** können als Potenzen mit 10 als Grundzahl geschrieben werden. Wenn die „1“ an der n-ten Stelle nach dem Komma steht, gilt: $0,0 \dots 01 = 10^{-n}$

- Für **Dezimalzahlen wie 0,02** gilt: $0,02 = 2 \cdot 0,01 = 2 \cdot 10^{-2}$



Beispiel 5: Schreiben Sie als Potenz bzw. als Produkt zwischen einer ganzen Zahl und einer Potenz:

- a) 0,00001 b) 0,03 c) 0,000005 d) 0,08

Lösung:

- a) $0,00001 = 10^{-5}$ b) $0,03 = 3 \cdot 0,01 = 3 \cdot 10^{-2}$
 c) $0,000005 = 5 \cdot 0,000001 = 5 \cdot 10^{-6}$ d) $0,08 = 8 \cdot 0,01 = 8 \cdot 10^{-2} = 2^3 \cdot 10^{-2}$

1.2. Rechnen mit Wurzeln:

Definition: $\sqrt{a}$ ist diejenige positive Zahl b, für die gilt: $b^2 = a$; mit $a > 0$.

Es gilt: $\sqrt{a}^2 = a$ und $\sqrt{a^2} = a$

Man nennt $\sqrt{a}$ auch „Wurzel von a“ oder „Quadratwurzel von a“.



← Merke

Beispiel 1: Berechnen Sie im Kopf: a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{49}$ c) $\sqrt{7}^2$ d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

Lösung: a) $\sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{49} = 7$ c) $\sqrt{7}^2 = 7$ d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}^2 = 5$

Multiplikation und Division von Wurzeln: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ und $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$



← Merke

Beispiel 2: Vereinfachen Sie soweit wie möglich: a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ c) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

Lösung:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$ c) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{5}} = \sqrt{4} = 2$

Teilweises Wurzelziehen: $\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$ bzw. $\sqrt{b \cdot a^2} = a \cdot \sqrt{b}$



← Merke

Beispiel 3: Ziehen Sie die Wurzel soweit wie möglich: a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{32}$ c) $\sqrt{75}$

Lösung: a) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}$ c) $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$

Nenner rational machen: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$



← Merke

Beispiel 4:

Machen Sie den Nenner rational und kürzen Sie soweit wie möglich: a) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{20}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{14}{\sqrt{7}}$

Lösung:

a) $\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{20 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{20 \cdot \sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$ c) $\frac{14}{\sqrt{7}} = \frac{14 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{14 \cdot \sqrt{7}}{7} = 2\sqrt{7}$

1.3. Terme und binomische Formeln:

Regeln:

- **Ausklammern:** $a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$ bzw. $a \cdot b - a \cdot c = a(b - c)$
- **Ausmultiplizieren:** $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ bzw. $a(-b - c) = -a \cdot b - a \cdot c$
- **Ausmultiplizieren von Summen:** $(a + b)(c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
bzw. $(a + b)(c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$ bzw. $(a - b)(c - d) = a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d$

← **Merke**

Beispiel 1: Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $(3x + 1)(5x + 2) + 15 - 8x$

b) $5x + (x + 3)(2x - 4) + 10$

Lösung:

a) $(3x + 1)(5x + 2) + 15 - 8x = 15x^2 + 6x + 5x + 2 + 15 - 8x = 15x^2 + 3x + 17$

b) $5x + (x + 3)(2x - 4) + 10 = 5x + 2x^2 - 4x + 6x - 12 + 10 = 2x^2 + 7x - 2$

Regeln:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (erste binomische Formel)
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (zweite binomische Formel)
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (dritte binomische Formel)

← **Merke**

Beispiel 2:

Lösen Sie die Quadratklammer bzw. das Klammerprodukt mithilfe der richtigen binomischen Formel auf:

a) $(x + 3)^2$

b) $(x - 4)^2$

c) $(2x - 1)^2$

d) $(x + 5)(x - 5)$

e) $(3x + 1)(3x - 1)$

Lösung:

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

b) $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

c) $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

d) $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$

e) $(3x + 1)(3x - 1) = 9x^2 - 1$

Beachte:

Steht vor einem Klammerprodukt oder vor einer quadratischen Klammer ein Minuszeichen, muss man **zusätzliche Klammern** setzen! Sonst gibt es einen Vorzeichenfehler.



Beispiel 3:

Vereinfachen Sie soweit wie möglich. Setzen Sie zusätzliche Klammern, falls nötig:

a) $2x - (x + 1)(2x + 4)$

b) $10 - (x + 3)^2 + x^2$

c) $-(2x + 1)^2 - 4x + 5$

d) $-(x + 1)(x - 1) + x^2 + 1$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x - (x + 1)(2x + 4) &= 2x - [(x + 1)(2x + 4)] = 2x - [2x^2 + 4x + 2x + 4] = 2x - [2x^2 + 6x + 4] = 2x - 2x^2 - 6x - 4 \\ &= -2x^2 - 4x - 4 \end{aligned}$$

$$\text{b) } 10 - (x + 3)^2 + x^2 = 10 - [x^2 + 6x + 9] + x^2 = 10 - x^2 - 6x - 9 + x^2 = 1 - 6x$$

$$\text{c) } -(2x + 1)^2 + 4x + 5 = -[4x^2 + 4x + 1] + 4x + 5 = -4x^2 - 4x - 1 + 4x + 5 = -4x^2 + 4$$

$$\text{d) } -(x + 1)(x - 1) + x^2 + 1 = -[x^2 - 1] + x^2 + 1 = -x^2 + 1 + x^2 + 1 = 2$$

1.4. Gleichungssysteme und ihre Lösung:

Zwei oder mehrere Gleichungen, in denen die Variablen x und y vorkommen, bilden ein **Gleichungssystem**.

Die **Lösungsmenge** eines solchen Gleichungssystems ist dasjenige Wertepaar $(x ; y)$, für das beide Gleichungen erfüllt sind.



← **Merke**

Beispiel: Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$2(y - 2) = 4(x - 3) \quad (I)$$

$$3(y + 4) = 3(x + 5) \quad (II)$$

Lösung:

Gleichungssysteme können mit drei verschiedenen Verfahren gelöst werden: dem Additionsverfahren, dem Gleichsetzungsverfahren und dem Einsetzungsverfahren. Welches Verfahren Sie anwenden, bleibt ihnen überlassen.

Variante 1: Additionsverfahren

1. Schritt: Umformen der Gleichungen

Zunächst sollte man beide Gleichungen in die Form $ax + by = c$ bringen (mit $a, b, c \in \mathbb{R}$) und übereinander schreiben. Im obigen Beispiel erhält man:

Gleichung (I):

$$2(y - 2) = 4(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow 2y - 4 = 4x - 12 \quad | -4x + 4$$

$$\Leftrightarrow -4x + 2y = -8$$

Gleichung (II):

$$3(y + 4) = 3(x + 5)$$

$$\Leftrightarrow 3y + 12 = 3x + 15 \quad | -3x - 12$$

$$\Leftrightarrow -3x + 3y = 3$$

2. Schritt: Multiplikation mit geeigneten Faktoren

Nun multipliziert man eine bzw. beide Gleichungen mit solchen Faktoren, dass eine Variable in beiden Gleichungen den gleichen Vorfaktor hat, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen. In unserem Beispiel erreicht man dies, indem man Gleichung (I) mit dem Faktor 3 und die Gleichung (II) mit dem Faktor (-4) multipliziert:

$$(I) \quad -4x + 2y = -8 \quad | \cdot 3$$

$$(II) \quad -3x + 3y = 3 \quad | \cdot (-4)$$

$$(I) \quad -12x + 6y = -24$$

$$(II) \quad 12x - 12y = -12$$

3. Schritt: Addition beider Gleichungen

Nun addiert man beide Gleichungen „von oben nach unten“. Dadurch fällt in der resultierenden Gleichung eine Variable heraus. In unserem Beispiel ist dies die x -Variable:

$$(I) \quad -12x + 6y = -24$$

$$(II) \quad 12x - 12y = -12$$

$$(I) + (II) : -6y = -36$$

Durch Umformen dieser Gleichung erhält man den Wert für die y -Variable: $y = 6$

4. Schritt: Berechnung der zweiten Variablen

Den Wert für die x -Variable berechnet man, indem man den y -Wert in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen einsetzt und nach x auflöst. Einsetzen von $y = 6$ in $-4x + 2y = -8$ ergibt:

$$-4x + 2 \cdot 6 = -8$$

$$\Leftrightarrow -4x + 12 = -8 \quad | -12$$

$$\Leftrightarrow -4x = -20 \quad | : (-4)$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Damit lautet die Lösungsmenge: $L = \{5 ; 6\}$

Variante 2: Gleichsetzungsverfahren**1. Schritt: Umformen beider Gleichungen**

Beim Gleichsetzungsverfahren bringt man zunächst beide Gleichungen in die Form $y = ax + b$ (mit $a, b, c \in \mathbb{R}$). Im obigen Beispiel erhält man:

Gleichung (I):

$$\begin{aligned} 2(y - 2) &= 4(x - 3) \\ \Leftrightarrow 2y - 4 &= 4x - 12 \quad | +4 \\ \Leftrightarrow 2y &= 4x - 8 \quad | :2 \\ \Leftrightarrow y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

Gleichung (II):

$$\begin{aligned} 3(y + 4) &= 3(x + 5) \\ \Leftrightarrow 3y + 12 &= 3x + 15 \quad | -12 \\ \Leftrightarrow 3y &= 3x + 3 \quad | :3 \\ \Leftrightarrow y &= x + 1 \end{aligned}$$

2. Schritt: Gleichsetzen beider Gleichungen

Indem man beide Gleichungen gleichsetzt, erhält man eine Gleichung mit nur einer Variablen, die dann berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= x + 1 \quad | +4 - x \\ \Leftrightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

3. Schritt: Berechnen der zweiten Variablen

Die zweite Variable kann man berechnen, indem man den berechneten x -Wert in eine der beiden umgestellten Gleichungen einsetzt. Einsetzen von $x = 5$ in die Gleichung $y = x + 1$ ergibt: $y = 6$

Damit lautet die Lösungsmenge: $L = \{5; 6\}$

Variante 3: Einsetzungsverfahren**1. Schritt: Umformen einer Gleichungen**

Beim Einsetzungsverfahren muss man nur eine Gleichung in die Form $y = ax + b$ bringen (mit $a, b, c \in \mathbb{R}$). Im obigen Beispiel erhält man mit Gleichung (I):

$$\begin{aligned} 2(y - 2) &= 4(x - 3) \\ \Leftrightarrow 2y - 4 &= 4x - 12 \quad | +4 \\ \Leftrightarrow 2y &= 4x - 8 \quad | :2 \\ \Leftrightarrow y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

2. Schritt: Einsetzen in die andere Gleichungen

Indem man diesen Term in die andere Gleichung einsetzt, erhält man eine Gleichung mit nur einer Variablen, die dann berechnet werden kann. Einsetzen von $2x - 4$ für y in Gleichung (II) $3(y + 4) = 3(x + 5)$ ergibt:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2x - 4 + 4) &= 3(x + 5) \\ \Leftrightarrow 3 \cdot (2x) &= 3x + 15 \\ \Leftrightarrow 6x &= 3x + 15 \quad | -3x \\ \Leftrightarrow 3x &= 15 \quad | :3 \\ \Leftrightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

3. Schritt: Berechnen der zweiten Variablen

Die zweite Variable kann man berechnen, indem man den berechneten x -Wert in die umgestellte Gleichung einsetzt. Einsetzen von $x = 5$ in die Gleichung $y = 2x - 4$ ergibt: $y = 6$

Damit lautet die Lösungsmenge: $L = \{5; 6\}$

1.5. Quadratische Gleichungen:

In quadratischen Gleichungen kommt die Gleichungsvariable (meistens x) auch als quadratische Potenz x^2 vor.

Quadratische Gleichungen der Form $x^2 + bx + c = 0$ (mit $b, c \in \mathbb{R}$) haben die Lösungen:

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Beachte:

1. Wenn die Diskriminante (= Term unter der Wurzel) negativ ist, gibt es **keine Lösung**.
Wenn die Diskriminante = 0 ist, gibt es **genau eine Lösung**.
Wenn die Diskriminante positiv ist, gibt es **zwei Lösungen**.
2. Quadratische Gleichungen müssen immer in die Form $x^2 + bx + c = 0$ umgewandelt werden, bevor die obigen Formeln angewendet werden dürfen.



← **Merke**

Beispiel:

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $(x - 2)(x + 3) - 2(x - 1)^2 = 2(2 - x)$.

Lösung:

1. Schritt: Umformen der Gleichung

Zunächst formt man die Gleichung so um, dass sie in der Form $x^2 + bx + c = 0$ da steht.

Beachte:

Steht vor einem Klammerprodukt oder vor einer quadratischen Klammer ein Minuszeichen, muss man **zusätzliche Klammern** setzen! Sonst gibt es einen Vorzeichenfehler.



$$\begin{aligned} & (x - 2)(x + 3) - 2 \mathbf{[(x - 1)^2]} = 2(2 - x) \\ \Leftrightarrow & x^2 + 3x - 2x - 6 - 2 \mathbf{[x^2 - 2x + 1]} = 4 - 2x \\ \Leftrightarrow & x^2 + 3x - 2x - 6 - 2x^2 + 4x - 2 = 4 - 2x \\ \Leftrightarrow & -x^2 + 5x - 8 = 4 - 2x \quad | \quad -4 + 2x \\ \Leftrightarrow & -x^2 + 7x - 12 = 0 \quad | \quad \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 7x + 12 = 0 \end{aligned}$$

2. Schritt: Einsetzen in die b, c -Formel

In dieser Gleichung ist $b = -7$ und $c = +12$.

Durch Einsetzen in die Formeln $x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ und $x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$$x_1 = \frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} \Rightarrow \underline{x_1 = 4} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} \Rightarrow \underline{x_2 = 3}$$

Die Gleichung $(x - 2)(x + 3) - 2(x - 1)^2 = 2(2 - x)$ hat also die Lösungsmenge $L = \{ 3 ; 4 \}$.

1.6. Bruchgleichungen:

Die Definitions- und Lösungsmenge einer Bruchgleichung werden folgendermaßen bestimmt:

1. Zuerst bestimmt man den **Hauptnenner** aller vorkommenden Brüche. Dazu sollte man alle Nenner vollständig in Produkte umwandeln.
(durch Ausklammern und/oder Anwenden der binomischen Formeln).
2. Mithilfe des Hauptnenners kann die **Definitionsmenge** bestimmt werden. Dazu gehören alle Zahlen, für die der Hauptnenner **nicht Null** wird.
3. Anschließend erweitert man alle Brüche der Gleichung auf den Hauptnenner. Indem man dann die ganze Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert, kürzt sich der Hauptnenner weg und man erhält eine **nennerfreie Gleichung**.
4. Schließlich bestimmt man die Lösung der nennerfreien Gleichung und prüft, ob diese Werte auch in der Definitionsmenge enthalten sind.



← **Merke**

Beispiel:

Bestimmen Sie die Definitions- und die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{1}{3x+6} + \frac{3}{x+2} = \frac{5}{3x}$.

Lösung:

1. Schritt: Bestimmen des Hauptnenners

$$1. \text{ Nenner} = 3x + 6 = 3 \cdot (x + 2)$$

$$2. \text{ Nenner} = x + 2 = (x + 2)$$

$$3. \text{ Nenner} = 3x = 3 \cdot x$$

$$\text{Hauptnenner} = 3 \cdot x \cdot (x + 2)$$

Beachte: In diesem Schema sollte man die Faktoren versetzt schreiben, so dass die identischen Faktoren genau übereinander stehen.

2. Schritt: Bestimmen der Definitionsmenge

Die x-Werte, für die der Hauptnenner = 0 wird, berechnet man, indem man jeweils jeden Faktor, in dem die x-Variable vorkommt, gleich Null setzt und nach x auflöst: $x_1 = 0$ und $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2$

Der Hauptnenner wird also 0 für $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$. Damit lautet die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$

3. Schritt: Umwandeln in eine nennerfreie Gleichung

Tip: Die Terme, mit denen die jeweiligen Brüche erweitert werden müssen, erkennt man an den Lücken des obigen Schemas.



Erweitern aller Brüche auf den HN = $3x(x + 2)$ ergibt:

$$\frac{1 \cdot x}{3(x+2) \cdot x} + \frac{3 \cdot 3x}{(x+2) \cdot 3x} = \frac{5 \cdot (x+2)}{3x \cdot (x+2)} \quad | \cdot \text{HN}$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner fallen alle Nenner weg. Man erhält die nennerfreie Gleichung:

$$\Leftrightarrow 1x + 9x = 5x + 10$$

4. Schritt: Lösen der nennerfreien Gleichung

$$\Leftrightarrow 10x = 5x + 10 \quad | -5x$$

$$\Leftrightarrow 5x = 10 \quad | :5$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$x = 2$ ist in der Definitionsmenge enthalten und daher auch die Lösung: $L = \{2\}$

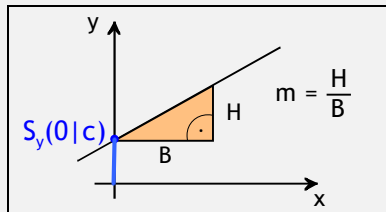
1.7. Lineare Funktionen:

1.7.1. Das Schaubild einer linearen Funktion:

Lineare Funktionen haben immer die **Funktionsgleichung** $y = m \cdot x + c$.
Ihr Schaubild ist eine Gerade. Darin ist **m die Steigung** und **c der y-Achsenabschnitt**.
Die Gerade läuft immer durch den Punkt $S_y(0|c)$ auf der y-Achse.

Anhand der Funktionsgleichung zeichnet man das entsprechende Schaubild folgendermaßen:

1. Zuerst trägt man den Punkt $S_y(0|c)$ ins Koordinatensystem ein.
2. Anschließend zeichnet man von S_y aus ein sogenanntes **Steigungsdreieck**. Dessen Breite und Höhe erkennt man, wenn man die **Steigung m als Bruch** schreibt: Darin gibt der Nenner die Breite und der Zähler die Höhe des Steigungsdreiecks an.
3. Die Gerade läuft durch S_y und den Endpunkt dieses Steigungsdreiecks.



← **Merke**

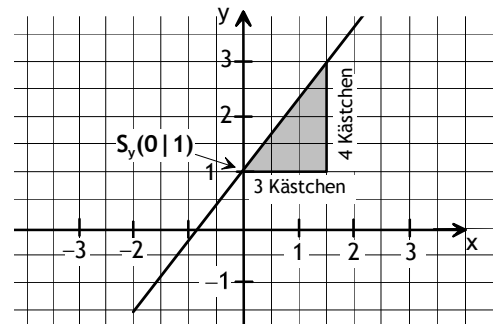
Beispiel 1:

Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion $y = \frac{4}{3}x + 1$.

Lösung:

Der y-Achsenabschnitt ist $c = +1$.

Aus $m = \frac{4}{3}$ folgt, dass das Steigungsdreieck 3 Kästchen breit und 4 Kästchen hoch sein muss (siehe Zeichnung).



Tipps:

1. Bei **negativer Steigung m** muss man die Höhe des Steigungsdreiecks **nach unten** zeichnen.
2. Wenn die Steigung m nicht als Bruch gegeben ist, muss man sie erst in einen Bruch umwandeln. Beispielsweise: $5 = \frac{5}{1}$ oder $1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$



Beispiel 2:

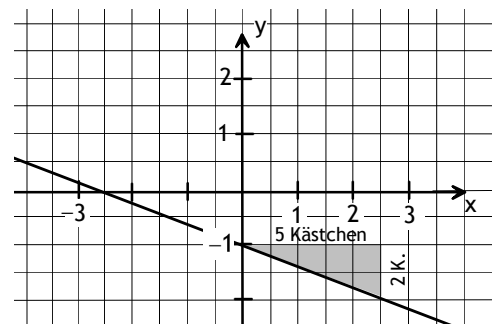
Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion $y = -\frac{2}{5}x - 1$.

Lösung:

Der y-Achsenabschnitt ist $c = -1$.

Bei der Steigung $m = -\frac{2}{5}$ ist das Steigungsdreieck 5 Kästchen breit und 2 Kästchen hoch (siehe Zeichnung).

Wichtig: Man muss bei negativen Steigungen die Höhe des Steigungsdreiecks nach unten zeichnen!



- 1.) Zwei **parallel Geraden** haben immer die **gleiche Steigung m**.
- 2.) Stehen zwei Geraden **g und h senkrecht** aufeinander, gilt: $m_g \cdot m_h = -1$

← **Merke**

1.7.2. Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenachsen:

Die Schnittpunkte einer Geraden $g: y = mx + c$ mit den Koordinatenachsen bestimmt man nach folgenden Regeln:

1. Der Schnittpunkt mit der **y-Achse** ist immer $S_y(0|c)$.
2. Den Schnittpunkt mit der **x-Achse** erhält man, indem man in der Funktionsgleichung für $y = 0$ einsetzt und nach x auflöst. Die y-Koordinate des Schnittpunkts mit der x-Achse ist immer 0.

← **Merke**

Beispiel 3:

Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte der Geraden $g: y = -\frac{3}{2}x + 9$.

Lösung:

- Schnitt mit der y-Achse: Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0|9)$.

- Schnitt mit der x-Achse:

Einsetzen von $y = 0$ in $y = -\frac{3}{2}x + 9$ ergibt:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{3}{2}x + 9 & | +\frac{3}{2}x \\
 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x &= 9 & | \cdot 2 \\
 \Leftrightarrow 3x &= 18 & | :3 \\
 \Leftrightarrow x &= 6
 \end{aligned}$$

Damit ist der Schnittpunkt mit der x-Achse $S_x(6|0)$.

1.7.3. Wie man die Gleichung einer Geraden bestimmt:

Erster Fall: Man kennt zwei Punkte, durch die eine Gerade läuft (siehe Beispiel 4).

1. Zunächst setzt man die Koordinaten der beiden gegebenen Punkte jeweils in die allgemeine Gleichung $y = m \cdot x + c$ ein. Man erhält so ein Gleichungssystem mit den Unbekannten m und c .
2. Anschließend schreibt man beide Gleichungen übereinander und zieht die untere von der oberen ab. Dadurch fällt die Variable c heraus. Mit der resultierenden Gleichung kann die Steigung m berechnet werden.
3. Den Wert für c berechnet man, indem man den Wert für m in eine der beiden Gleichungen einsetzt und nach c auflöst.

Zweiter Fall: Man kennt die Steigung m und einen Punkt P , durch den die Gerade läuft. (siehe Beispiel 5)

1. Man setzt die Zahl für die Steigung und die Koordinaten von P in die Gleichung $y = m \cdot x + c$ ein. Man erhält so eine Gleichung, die nach der Unbekannten c aufgelöst werden kann.
2. Mit den Werten für m und c kann man die gesuchte Geradengleichung aufschreiben: $y = m \cdot x + c$.

Dritter Fall: Man liest den y-Achsenabschnitt c an einem Schaubild ab. Die Steigung m kann man mit Hilfe eines Steigungsdreiecks bestimmen (siehe Beispiel 6)

← **Merke**

Beispiel 4:

Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte A(3 | 7) und B(-6 | -8) geht ?

Lösung:**1. Schritt: Einsetzen der Punktkoordinaten und Berechnen der Steigung m**

Durch Einsetzen der Koordinaten beider Punkte in die allgemeine Gleichung $y = m \cdot x + c$ erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\text{Mit A(3 | 7):} \quad 7 = m \cdot 3 + c \quad \Leftrightarrow \quad 7 = 3m + c \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit B(-6 | -8):} \quad -8 = m \cdot (-6) + c \quad \Leftrightarrow \quad -8 = -6m + c \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}) - (\text{II}) \text{ ergibt:} \quad 15 = 9m \quad | :9$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

2. Schritt: Berechnen des y-Achsenabschnitts c

Einsetzen von $m = \frac{5}{3}$ in Gleichung (I) $7 = 3m + c$ ergibt:

$$7 = 3 \cdot \frac{5}{3} + c$$

$$\Leftrightarrow 7 = 5 + c \quad | -5$$

$$\Leftrightarrow 2 = c \text{ bzw. } c = 2$$

Die Funktionsgleichung lautet also: $y = \frac{5}{3}x + 2$

Beispiel 5:

Die Gerade g hat die Steigung $m = 2$ und geht durch den Punkt $P(-3 | -1)$.
Wie lautet die Geradengleichung ?

Lösung:

Einsetzen von $m = 2$, $x = -3$ und $y = -1$ in $y = m \cdot x + c$ ergibt:

$$-1 = 2 \cdot (-3) + c$$

$$\Leftrightarrow -1 = -6 + c \quad | +6$$

$$\Leftrightarrow 5 = c \text{ bzw. } c = 5$$

Damit lautet die gesuchte Geradengleichung g : $y = 2x + 5$

Beispiel 6:

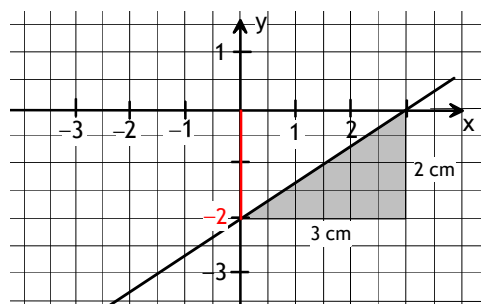
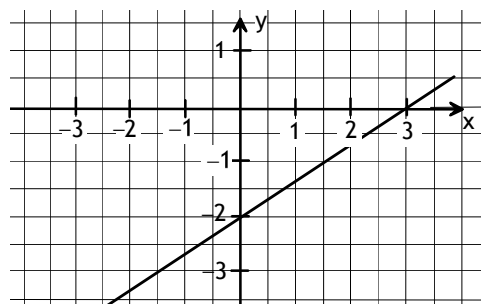
Bestimmen Sie die Gleichung der abgebildeten Geraden.

Lösung:

Den y-Achsenabschnitt kann man sofort ablesen: $c = -2$.
Um die Steigung m bestimmen zu können, muss man ein Steigungsdreieck an die Gerade zeichnen. Das eingezeichnete Steigungsdreieck ist 3 cm breit und 2 cm hoch.

Somit ist die Steigung $m = \frac{2}{3}$.

Die Gleichung der Geraden lautet also: $y = \frac{2}{3}x - 2$

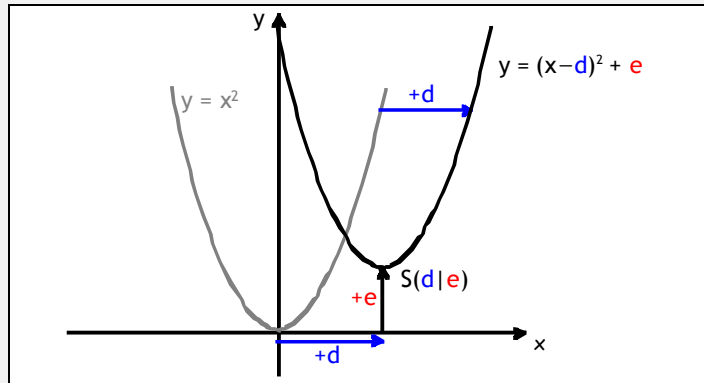


1.8. Quadratische Funktionen:

1.8.1. Die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ und ihr Schaubild:

Eine quadratische Funktion der Art $y = (x - d)^2 + e$ nennt man **Scheitelform**.

Ihr Schaubild ist eine Normalparabel mit den Scheitelkoordinaten $S(d|e)$.



Beachte: Steht vor der Quadratklammer ein Minuszeichen, ist das Schaubild nach unten geöffnet: $y = -(x - d)^2 + e$



← **Merke**

Beispiel 1: Bestimmen Sie die Scheitelkoordinaten der quadratischen Funktionen:

a) $y = (x - 5)^2 + 2$

b) $y = (x + 3)^2 - 6$

c) $y = (x - 7)^2 - 4$

Lösung:

a) $S(5|2)$

b) $S(-3|-6)$

c) $S(7|-4)$

Tipp: Die x-Koordinate des Scheitelpunkts ist immer der Wert, für den die Quadratklammer Null wird. Die y-Koordinate des Scheitelpunkts steht immer rechts von der Quadratklammer.



1.8.2. Der Scheitelpunkt der quadratischen Funktion $y = x^2 + bx + c$:

Aus der allgemeinen quadratischen Funktion $y = x^2 + bx + c$ (mit $b, c \in \mathbb{R}$) kann man die Scheitelkoordinaten nicht direkt ablesen. Dazu muss man sie erst mithilfe einer **quadratischen Ergänzung** in die Scheitelform umwandeln.

Die Umformungsschritte sind (vgl. Beispiel 2):

$$\Leftrightarrow y = x^2 + bx + c$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Indem man die Funktionsgleichung mit $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ergänzt, kann man die ersten drei Summanden mit der ersten bzw. zweiten binomischen Formel zusammenfassen. Da sich der gesamte Funktionsterm nicht ändern darf, muss man $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ „hinten“ wieder abziehen.



← **Merke**

Beispiel 2:

Eine Parabel hat die Funktionsgleichung $p: y = x^2 + 4x - 5$

Bestimmen Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes.

Lösung:

1. Schritt: Umwandeln in die Scheitelform

Eine quadratische Ergänzung der Funktionsgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4x - 5 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 5 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 + 4x + 4 - 5 - 4 \\ \Leftrightarrow y &= (x + 2)^2 - 9 \end{aligned}$$

2. Schritt: Ablesen der Scheitelkoordinaten

Der Scheitelform kann man die Scheitelkoordinaten direkt ablesen. Es ist: $S(-2|-9)$

1.8.3. Die Schnittpunkte einer Parabel mit den Koordinatenachsen:

Die Schnittpunkte einer Parabel mit den Koordinatenachsen bestimmt man nach folgenden Regeln:

1. Der Schnittpunkt mit der **y-Achse** hat immer die x-Koordinate $x = 0$. Indem man in der Parabelgleichung für $x = 0$ einsetzt, erhält man die y-Koordinate des Schnittpunkts.
2. Den Schnittpunkt mit der **x-Achse** erhält man, indem man in der Parabelgleichung für $y = 0$ einsetzt und dann nach x auflöst.

Beachte: Beim Schnitt mit der **y-Achse** ist die **x-Koordinate immer 0**.

Beim Schnitt mit der **x-Achse** ist die **y-Koordinate immer 0**.



← **Merke**

Beispiel 3:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel $p: y = x^2 + 3x - 4$ mit den Koordinatenachsen.

Lösung:

- Schnittpunkt mit der y-Achse:

Einsetzen von $x = 0$ in die Parabelgleichung ergibt:

$$y = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4 \Leftrightarrow y = -4$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat also die Koordinaten $S_y(0|-4)$.

- Schnittpunkt mit der x-Achse:

Einsetzen von $y = 0$ in die Parabelgleichung ergibt:

$$0 = x^2 + 3x - 4 \text{ bzw. } x^2 + 3x - 4 = 0$$

Die Lösung(en) dieser Gleichung bestimmt man mit der b, c - Formel (s. Kap. 1.2.).

Man erhält: $x_1 = 1$ und $x_2 = -4$

Damit sind die Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(1|0)$ und $N_2(-4|0)$

(Anmerkung: „N“ steht für Nullstelle.)

1.8.4. Wie man eine Parabelgleichung bestimmt:**Erster Fall: Man kennt die Koordinaten des Scheitelpunkts**

Kennt man die Scheitelkoordinaten $S(d|e)$ einer Normalparabel, erhält man die zugehörige Funktionsgleichung, indem man in der **Scheitelform** $y = (x - d)^2 + e$ für d die x -Koordinate und für e die y -Koordinate des Scheitelpunkts einsetzt.

← **Merke****Beispiel 4:**

Wie lautet die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel, deren Scheitel bei $S(-3|4)$ liegt?

Geben Sie die Parabelgleichung in der Form $y = x^2 + bx + c$ an.

Lösung:**1. Schritt: Einsetzen in d und e**

Einsetzen von $d = -3$ und $e = 4$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ ergibt:

$$y = (x - (-3))^2 + 4 \text{ bzw. } y = (x + 3)^2 + 4$$

2. Schritt: Umformen in die allgemeine Parabelgleichung

Durch Ausmultiplizieren der Klammer erhält man die Parabelgleichung in der Form $y = x^2 + bx + c$:

$$\begin{aligned} y &= (x + 3)^2 + 4 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 + 6x + 9 + 4 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 + 6x + 13 \end{aligned}$$

Zweiter Fall: Man kennt die Koordinaten von zwei Parabelpunkten

Kennt man die Koordinaten zweier Parabelpunkte A und B, setzt man ihre Koordinaten jeweils in die allgemeine Funktionsgleichung $y = x^2 + bx + c$ ein.

Man erhält so ein Gleichungssystem, das nach den Variablen b und c aufgelöst werden kann (vgl. Beispiel 5).

← **Merke****Beispiel 5:**

Wie lautet die Funktionsgleichung einer Normalparabel, die durch die Punkte $A(-1|8)$ und $B(4|13)$ geht?

Lösung:**1. Schritt: Einsetzen der Punktkoordinaten**

Durch jeweiliges Einsetzen der Punktkoordinaten in die allgemeine Funktionsgleichung $y = x^2 + bx + c$ erhält man zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{Mit } A(-1|8) : \quad 8 &= (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ \Leftrightarrow 8 &= 1 - 1b + c \quad (I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } B(4|13) : \quad 13 &= (4)^2 + b \cdot (4) + c \\ \Leftrightarrow 13 &= 16 + 4b + c \quad (II) \end{aligned}$$

2. Schritt: Berechnen von b

Beide Gleichungen schreibt man dann übereinander und zieht die untere von der oberen ab.
Dadurch fällt die Variable c heraus:

$$\begin{array}{rcl} 8 & = & 1 - 1b + c & \text{(I)} \\ 13 & = & 16 + 4b + c & \text{(II)} \\ \hline -5 & = & -15 - 5b & \text{(III) = (I) - (II)} \end{array}$$

Aus Gleichung (III) erhält man den Wert für b:

$$\begin{array}{rcl} -5 & = & -15 - 5b & | +15 \\ \Leftrightarrow 10 & = & -5b & | :(-5) \\ \Leftrightarrow -2 & = & b \text{ bzw. } b = -2 \end{array}$$

3. Schritt: Berechnen von c

Den Wert für c erhält man, indem man $b = -2$ in eine der beiden Gleichungen (I) oder (II) einsetzt.
Einsetzen von $b = -2$ in die Gleichung (I) $8 = 1 - 1b + c$ ergibt:

$$\begin{array}{rcl} 8 & = & 1 - 1 \cdot (-2) + c \\ \Leftrightarrow 8 & = & 1 + 2 + c \\ \Leftrightarrow 8 & = & 3 + c & | -3 \\ \Leftrightarrow 5 & = & c \text{ bzw. } c = 5 \end{array}$$

Die Funktionsgleichung der Parabel lautet also: $y = x^2 - 2x + 5$

Tipp: Negative Zahlen muss man beim Einsetzen in Klammern setzen !



Dritter Fall ($y = ax^2 + c$): Von einer Parabel mit der allgemeinen Gleichung $y = ax^2 + c$ ist der Scheitelpunkt $S(0|c)$ und ein weiterer Punkt $P(d|f)$ bekannt.

Alle Parabeln mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ verlaufen **symmetrisch zur y-Achse** und haben den **Scheitelpunkt $S(0|c)$** . Kennt man also die Koordinaten des Scheitelpunkts, kann man den c-Wert sofort angeben. Den fehlenden a-Wert erhält man, indem man in der Gleichung $y = ax^2 + c$ für x und y die Koordinaten eines weiteren Punkts $P(d|f)$ einsetzt.



← **Merke**

Beispiel 6:

Eine Parabel der Form $y = ax^2 + c$ hat den Scheitelpunkt $S(0|2)$ und verläuft durch den Punkt $P(4|6)$.
Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel ?

Lösung:

1. Schritt: Aufstellen der unvollständigen Parabelgleichung

Mit dem Scheitelpunkt $S(0|2)$ erhält man sofort: $c = 2$.

Damit lautet die unvollständige Parabelgleichung: $y = ax^2 + 2$

2. Schritt: Berechnen des a-Werts

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $P(4|6)$ in die Gleichung $y = ax^2 + 2$ ergibt:

$$\begin{array}{rcl} 6 & = & a \cdot 4^2 + 2 \\ \Leftrightarrow 6 & = & a \cdot 16 + 2 & | -2 \\ \Leftrightarrow 4 & = & a \cdot 16 & | :16 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{16} & = & a \text{ bzw. } a = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{array}$$

Damit lautet die vollständige Parabelgleichung: $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$

Hinweis: Die Koordinaten des Scheitelpunkts und eines weiteren Punkts der Parabel $p: y = ax^2 + c$ muss bzw. kann man auch oft in einem Schaubild ablesen.

1.8.5. Wie man die Schnittpunkte zweier Parabeln berechnet:

Die Schnittpunkte zweier Parabeln berechnet man, indem man ihre **Funktionsterme gleichsetzt** und die resultierende Gleichung nach x auflöst.

Die y-Koordinaten der Schnittpunkte erhält man, indem man die berechneten x-Werte jeweils in eine der beiden Parabelgleichungen einsetzt.



← **Merke**

Beispiel 7:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln $p_1: y = x^2 - x - 5$ und $p_2: y = x^2 + 3x + 7$

Lösung:**1. Schritt: Berechnen der x-Koordinate**

Gleichsetzen der beiden Funktionsterme ergibt:

$$x^2 - x - 5 = x^2 + 3x + 7 \quad | -x^2 - 3x + 5$$

$$\Leftrightarrow -4x = 12 \quad | :(-4)$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

2. Schritt: Berechnen der y-Koordinate

Durch Einsetzen von $x = -3$ in eine der beiden Parabelgleichungen, beispielsweise in $y = x^2 + 3x + 7$, erhält man die y-Koordinate des Schnittpunkts:

$$y = (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 7$$

$$\Leftrightarrow y = 9 - 9 + 7$$

$$\Leftrightarrow y = 7$$

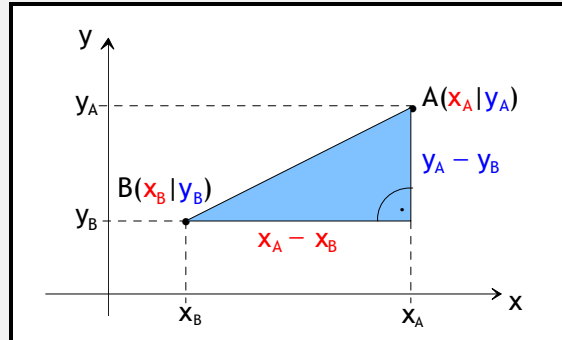
Damit ist der Schnittpunkt zwischen den beiden Parabeln: **P(-3 | 7)**

1.9. Der Abstand zweier Punkte:

Den Abstand d_{AB} zweier Punkte $A(x_A | y_A)$ und $B(x_B | y_B)$ berechnet man mit der Formel:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Diese Formel ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:



Man sollte also zuerst sowohl die Differenz der x-Koordinaten als auch die Differenz der y-Koordinaten berechnen, sodass man anschließend mit dem Satz des Pythagoras den gesuchten Abstand berechnen kann.



← **Merke**

Beispiel 1:

- a) Bestimmen Sie den Abstand der Punkte $A(4|6)$ und $B(1|8)$.
- b) Bestimmen Sie den Abstand der Punkte $P(-2|-4)$ und $Q(-7|0)$.

Lösung:

a) Es ist: $x_A - x_B = 4 - 1 = 3$ und $y_A - y_B = 6 - 8 = -2$

Damit folgt: $d_{AB} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3,61$

b) Es ist: $x_P - x_Q = -2 - (-7) = -2 + 7 = 5$ und $y_P - y_Q = -4 - 0 = -4$

Damit folgt: $d_{AB} = \sqrt{(5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} \approx 6,403$

Tipp: Negative Zahlen muss man beim Einsetzen in Klammern setzen !



1.10. Tipps für Parabelaufgaben

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick darüber, wie man anhand der Angaben einer Aufgabenstellung sofort den richtigen Lösungsansatz erkennt. Das „Angenehme“ dabei ist, dass man die Parabelaufgaben auch dann lösen kann, wenn man den Aufgabentext zunächst überhaupt nicht versteht.

Was muss man tun, wenn ...	Lösungsansatz:
1. der Scheitelpunkt bekannt ist ?	Man muss die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(d e)$ einfach in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ einsetzen (vgl. Seite 16). Wenn man anschließend die Quadratklammer auflöst, erhält man die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$.
2. man den Scheitelpunkt bestimmen soll bzw. die Parabel zeichnen soll ?	In diesem Fall muss man die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ mithilfe einer quadratischen Ergänzung in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ umwandeln (vgl. Seite 14).
3. zwei Punkte der Parabel bekannt sind ?	Man muss die Koordinaten der beiden Punkte jeweils in die allgemeine Form $y = x^2 + bx + c$ einsetzen. Man erhält so ein Gleichungssystem, das nach den Variablen b und c gelöst werden kann (vgl. Seite 16, 17). Vorsicht: Die Koordinaten der Punkte müssen natürlich für x und y eingesetzt werden und nicht für b und c !
4. zwei Punkte einer Geraden bekannt sind ?	Man muss die Koordinaten der beiden Punkte jeweils in die allgemeine Form $y = m \cdot x + c$ einsetzen. Man erhält so ein Gleichungssystem, das nach den Variablen m und c gelöst werden kann (vgl. Seite 13). Vorsicht: Die Koordinaten der Punkte müssen natürlich für x und y eingesetzt werden und nicht für m und c !
5. man von einer Geraden die Steigung m und einen Punkt kennt ?	Man muss in der allgemeinen Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ für die Steigung m den angegebenen Wert und für x und y die Koordinaten des bekannten Punktes einsetzen. Die resultierende Gleichung kann dann nach c aufgelöst werden (vgl. Seite 13).
6. man die Schnittpunkte zweier Parabeln (Geraden) berechnen soll ?	Man muss die Funktionsterme beider Parabeln bzw. Geraden gleichsetzen . Anschließend löst man die Gleichung nach x auf. Das Ergebnis ist die x -Koordinate des Schnittpunkts. Die y -Koordinate erhält man, indem man den x -Wert in eine der beiden Parabelgleichungen einsetzt (vgl. Seite 18).
7. man die Schnittpunkte mit der x -Achse bzw. y -Achse berechnen soll ?	Schnitt mit x-Achse: In der Funktionsgleichung muss man für $y = 0$ setzen und den entsprechenden x -Wert ausrechnen. Die y -Koordinate des Schnittpunkts mit der x -Achse ist immer 0. Schnitt mit der y-Achse: In der Funktionsgleichung muss man für $x = 0$ setzen und dann den y -Wert ausrechnen. Die x -Koordinate des Schnittpunkts mit der y -Achse ist immer 0 (vgl. Seite 15).
8. man die Gleichung $y = ax^2 + c$ aufstellen soll und der Scheitelpunkt $S(0 c)$ und ein weiterer Punkt $P(d f)$ der Parabel bekannt sind ?	Der c -Wert in $y = ax^2 + c$ ist die y -Koordinate des Scheitelpunkts $S(0 c)$. Den fehlenden a -Wert erhält man, indem man in der Gleichung $y = ax^2 + c$ für x und y die Koordinaten eines weiteren Punkts $P(d f)$ einsetzt.
9. man den Abstand zweier Punkte berechnen soll ?	Den Abstand d_{AB} zweier Punkte $A(x_A y_A)$ und $B(x_B y_B)$ berechnet man, indem man die Koordinaten der beiden Punkte in die Formel einsetzt (vgl. Seite 19): $d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

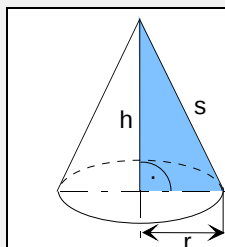
2. Stereometrie

2.1. Kegel und Zylinder:



← Merke

In jedem Kegel bilden die Seitenlinie s , der Radius r und die Kegelhöhe h ein rechtwinkliges Dreieck. Darin lautet der **Satz des Pythagoras**: $s^2 = r^2 + h^2$
Außerdem gelten die Formeln:

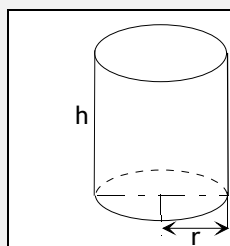


$$\text{Volumen: } V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\text{Mantelfläche: } M = \pi \cdot r \cdot s$$

$$\text{Oberfläche: } O = \pi \cdot r \cdot (r + s)$$

In einem Zylinder gelten die Formeln:



$$\text{Volumen: } V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\text{Mantelfläche: } M = 2\pi \cdot r \cdot h$$

$$\text{Oberfläche: } O = 2\pi \cdot r \cdot (r + h)$$

(Diese Formeln dürfen auch in der Formelsammlung nachgeschlagen werden.)

Tip: Falls man bei einer Körperberechnung überhaupt keinen Lösungsansatz erkennt, sollte man einfach alle angegebenen Größen in die obigen Formeln einsetzen. Der weitere Lösungsweg eröffnet sich dann oft von selbst.



Beispiel:

Ein Kegel hat das Volumen $V = 230 \text{ cm}^3$ und die Höhe $h = 8 \text{ cm}$.
Berechnen Sie den Radius der Grundfläche, die Seitenlinie s und die Oberfläche des Kegels.

Lösung:

1. Schritt: Einsetzen der gegebenen Werte in alle Formeln

Zunächst setzt man die angegebenen Werte in alle Formeln ein, die es zum Kegel gibt.
Mit $V = 230 \text{ cm}^3$ und $h = 8 \text{ cm}$ erhält man die Gleichungen:

$$(I) \quad 230 = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot 8$$

$$(II) \quad M = \pi \cdot r \cdot s$$

$$(III) \quad O = \pi \cdot r \cdot (r + s)$$

$$(IV) \quad s^2 = r^2 + 8^2$$

2. Schritt: Berechnen der ersten unbekannten Größe

Nun sucht man sich diejenige Gleichung heraus, in der nur noch eine Variable vorkommt.

Im Beispiel ist dies Gleichung (I): $230 = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot 8$

Durch Umformen erhält man den Radius r:

$$230 = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot 8 \quad | : \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 690 = \pi \cdot r^2 \cdot 8 \quad | : 8\pi$$

$$\Leftrightarrow 27,45 = r^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow 5,24 = r \text{ bzw. } \underline{\underline{r = 5,24 \text{ cm}}}$$

3. Schritt: Einsetzen des berechneten Wertes

Indem man den berechneten Wert in die Ausgangsformeln einsetzt, kann man eine weitere unbekannte Größe berechnen. Einsetzen von $r = 5,24 \text{ cm}$ in die Gleichung (IV) $s^2 = r^2 + 8^2$ ergibt:

$$s^2 = (5,24)^2 + 8^2$$

$$\Leftrightarrow s^2 = 91,46 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{s = 9,56 \text{ cm}}}$$

Durch Einsetzen von $r = 5,24 \text{ cm}$ und $s = 9,56 \text{ cm}$ in die Gleichung (III) $O = \pi \cdot r \cdot (r + s)$ erhält man schließlich die gesuchte Kegeloberfläche:

$$O = \pi \cdot 5,24 \cdot (5,24 + 9,56)$$

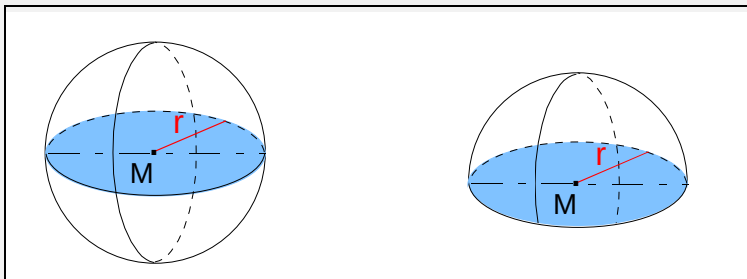
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{O = 243,64 \text{ cm}^2}}$$

Tipp: Wenn ein Kegel und ein Zylinder die gleiche Grundfläche (= Kreis) haben, haben sie natürlich auch den gleichen Radius r !



2.2. Kugel und Halbkugel:

Das Volumen und die Oberfläche einer Kugel bzw. Halbkugel werden mit folgenden Formeln berechnet:



Kugel: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$; $O = 4\pi \cdot r^2$

Halbkugel: $V = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3$; $O = 3\pi \cdot r^2$

Man beachte, dass bei der Halbkugel auch die Kreisfläche zur Oberfläche gehört.



← **Merke**

Beispiel:

Eine Kugel hat das Volumen $V = 750 \text{ cm}^3$. Berechnen Sie die Oberfläche der Kugel.

Lösung:

1. Schritt: Einsetzen der gegebenen Werte in alle Formeln

Zunächst setzt man den angegebenen Wert in alle Formeln ein:

$$(I) \quad 750 = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

$$(II) \quad O = 4\pi \cdot r^2$$

2. Schritt: Umstellen nach dem Radius

Nun stellt man die Gleichung, in der nur eine Unbekannte vorkommt, nach dieser Unbekannten um:

$$750 = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \quad | : \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 562,5 = \pi \cdot r^3 \quad | : \pi$$

$$\Leftrightarrow 179,05 = r^3 \quad | \text{ dritte Wurzel ziehen}$$

$$\Leftrightarrow 5,64 = r \text{ bzw. } r = 5,64 \text{ cm}$$

Tipp: Berechnen der dritten Wurzel mit dem Taschenrechner

Gleichungen der Art $r^3 = \text{„Zahl“}$ löst man, indem man von der „Zahl“ die dritte Wurzel zieht. Je nach Taschenrechner kann die Tastenfolge unterschiedlich sein. Daher wird hier nur eine Variante am Beispiel der dritten Wurzel von 64 vorgestellt:

$$64 \rightarrow [y^x] \rightarrow [1] \rightarrow [a^b_c] \rightarrow [3] \rightarrow [=]$$

In Worten: "64 hoch ein Drittel".

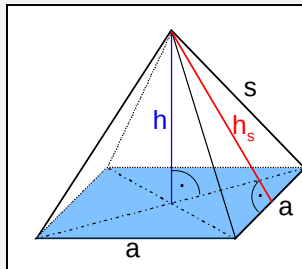


Durch Einsetzen von $r = 5,64 \text{ cm}$ in die Formel $O = 4\pi \cdot r^2$ erhält man die gesuchte Oberfläche:

$$O = 4\pi \cdot (5,64 \text{ cm})^2 = \underline{\underline{399,73 \text{ cm}^2}}$$

2.3. Quadratische Pyramide:

In einer quadratischen Pyramide gelten folgende **Bezeichnungen**:



a = Grundkante

h = Pyramidenhöhe

h_s = Höhe einer Seitenfläche

s = Seitenkante



← **Merke**

Alle vier Seitenflächen sind identische, gleichschenklige Dreiecke. Die Grundfläche ist ein Quadrat mit der Diagonalen d .

Für Berechnungen an quadratischen Pyramiden benötigt man folgende **Formeln**:

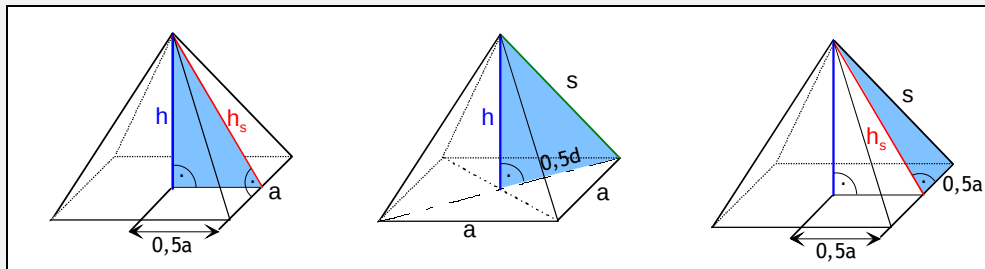
$$\text{Volumen: } V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$$

$$\text{Mantelfläche: } M = 2 \cdot a \cdot h_s$$

$$\text{Oberfläche: } O = a^2 + 2a \cdot h_s$$

$$\text{Diagonale: } d = a\sqrt{2}$$

Wichtig für die Berechnungen in einer quadratischen Pyramide sind folgende rechtwinklige Dreiecke:



Beispiel:

In einer quadratischen Pyramide ist die Diagonale der Grundfläche $d = 14,6$ cm. Die Höhe h und eine Seitenkante schließen den Winkel $\gamma = 30^\circ$ ein.

Berechnen Sie die Mantelfläche der Pyramide.

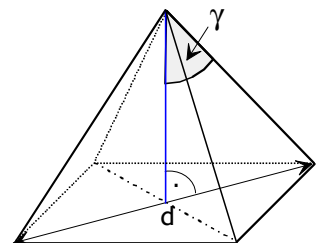
Lösung:

1. Schritt: Einsetzen der gegebenen Werte in alle Formeln

Zunächst setzt man die gegebenen Werte in die obigen Formeln ein. Da nur die Diagonale d gegeben ist, kann man nur in die Gleichung $d = a\sqrt{2}$ einsetzen.

$$\text{Man erhält: } 14,6 = a\sqrt{2} \quad | : \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 10,32 = a \quad \text{bzw.} \quad a = 10,32 \text{ cm}$$

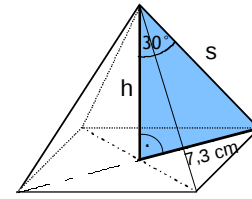


2. Schritt: Berechnung weiterer Größen mithilfe eines rechtwinkligen Dreiecks

Mit $\gamma = 30^\circ$ und $0,5d = 7,3 \text{ cm}$ kann man im markierten Dreieck die Seitenkante s und die Pyramidenhöhe h berechnen.

Mit der Sinusfunktion erhält man: $\sin 30^\circ = \frac{7,3}{s} \Rightarrow s = 14,6 \text{ cm}$

Mit der Tangensfunktion erhält man: $\tan 30^\circ = \frac{7,3}{h} \Rightarrow h = 12,64 \text{ cm}$

**3. Schritt: Berechnung der gesuchten Größe**

Für den Mantel gilt die Formel: $M = 2a \cdot h_s$

Man benötigt also noch die Länge der Seitenhöhe h_s . Diese kann man im markierten Dreieck mit dem Satz des Pythagoras berechnen.

Es gilt: $h_s^2 = h^2 + (0,5a)^2$

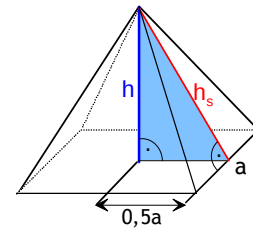
Mit den Werten $h = 12,64 \text{ cm}$ und $a = 10,32 \text{ cm}$ ergibt sich:

$$h_s^2 = 186,40 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow h_s = 13,65 \text{ cm}$$

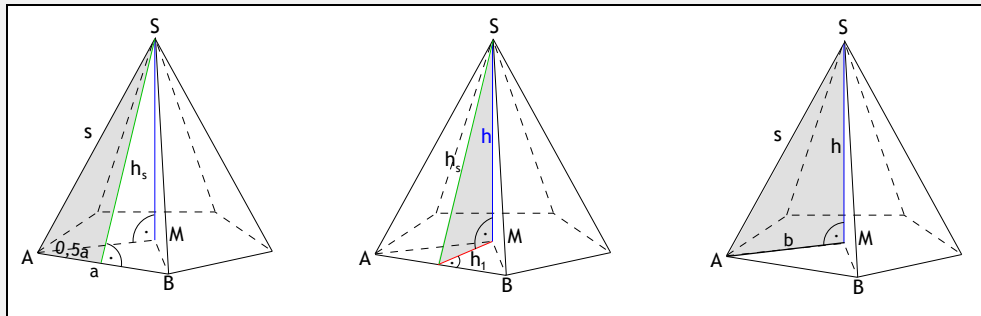
Durch Einsetzen von $a = 10,32 \text{ cm}$ und $h_s = 13,65 \text{ cm}$ in die Formel $M = 2a \cdot h_s$ erhält man schließlich:

$M = 281,74 \text{ cm}^2$



2.3. Fünfseitige Pyramide:

In einer fünfseitigen Pyramide sind folgende rechtwinklige Dreiecke wichtig:

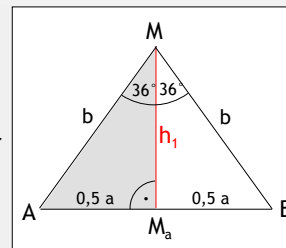


Die **Grundfläche G** besteht aus 5 gleichschenkligen Dreiecken der Sorte ABM mit $A_{ABM} = 0,5 \cdot a \cdot h_1$. Damit ist $G = 5 \cdot A_{ABM} = 2,5 \cdot a \cdot h_1$.

Die **Strecken a, b und h₁** können im Dreieck AM_aM ineinander umgerechnet werden. **Beachte:** Der Winkel $\angle BMA$ beträgt immer $72^\circ = 360^\circ : 5$. Die Höhe h₁ halbiert diesen Winkel.

Der **Mantel M** der fünfseitigen Pyramide besteht aus 5 Dreiecken der Sorte ABS. Die Fläche des Dreiecks ABS ist $0,5 \cdot a \cdot h_s$. Somit ist die Mantelfläche $M = 2,5 \cdot a \cdot h_s$.

Das **Volumen V** ist: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$; (mit der Pyramidenhöhe h)



← **Merke**

Beispiel 1:

Eine regelmäßige fünfseitige Pyramide hat die Grundkante $a = 8 \text{ cm}$ und die Höhe $h = 12 \text{ cm}$. Berechnen Sie das Volumen und den Mantel dieser Pyramide.

Lösung:

1. Schritt: Berechnen der Grundfläche G und des Volumens V

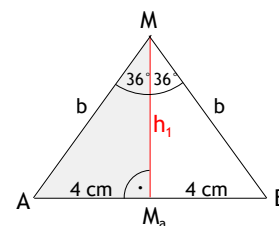
Für die Grundfläche G gilt: $G = 2,5 \cdot a \cdot h_1$.

Die Höhe h₁ des Dreiecks ABM kann im Dreieck AM_aM berechnet

werden. Es gilt: $\tan 36^\circ = \frac{h_1}{0,5a} \Leftrightarrow h_1 = 5,51 \text{ cm}$

Mit $a = 8 \text{ cm}$ und $h_1 = 5,51 \text{ cm}$ erhält man: $G = 110,2 \text{ cm}^2$

Damit folgt für das Volumen: $V = 440,8 \text{ cm}^3$



2. Schritt: Berechnen der Seitenfläche und des Mantels

Für die Seitenfläche A_{ABS} gilt: $A_{ABS} = 0,5 \cdot a \cdot h_s$.

Die Seitenhöhe h_s des Dreiecks ABS kann im markierten Dreieck mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

Es gilt: $h_s^2 = h^2 + h_1^2$

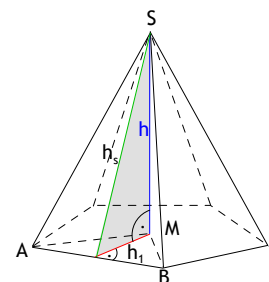
Mit $h = 12 \text{ cm}$ und $h_1 = 5,51 \text{ cm}$ erhält man:

$$h_s^2 = 174,36 \text{ cm}^2 \quad | \quad \sqrt{}$$

$\Leftrightarrow h_s = 13,2 \text{ cm}$

Mit $a = 8 \text{ cm}$ und $h_s = 13,2 \text{ cm}$ folgt: $A_{ABS} = 52,8 \text{ cm}^2$

Für $M = 5 \cdot A_{ABS}$ erhält man somit: $M = 264 \text{ cm}^2$





Tipp: Die Berechnungen von 6, 7, 8, ...-seitigen Pyramiden gehen ganz genau so wie in 5-seitigen Pyramiden. Der einzige Unterschied besteht darin, dass im Dreieck ABM der Winkel $\sphericalangle AMB$ jeweils ein anderer ist.

bei einer 6-seitigen Pyramide: $\sphericalangle AMB = 60^\circ (= 360^\circ : 6)$,

bei einer 7-seitigen Pyramide: $\sphericalangle AMB = 51,4^\circ (= 360^\circ : 7)$,

bei einer 8-seitigen Pyramide: $\sphericalangle AMB = 45^\circ (= 360^\circ : 8)$, usw.

Zur 6-seitigen Pyramide stehen die benötigten Formeln auch in der Formelsammlung.

Beispiel 2:

Eine regelmäßige sechseitige Pyramide hat das Volumen $V = 750 \text{ cm}^3$ und die Höhe $h = 14 \text{ cm}$. Berechnen Sie die Mantelfläche der Pyramide.

Lösung:

1. Schritt: Einsetzen der bekannten Werte (Formeln siehe Formelsammlung)

Für das Volumen einer regelmäßigen sechseitigen Pyramide gilt: $V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \cdot h$

Einsetzen von $V = 750 \text{ cm}^3$ und $h = 14 \text{ cm}$ ergibt:

$$750 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \cdot 14$$

$$\Leftrightarrow 750 = 12,12 \cdot a^2 \quad | : 12,12$$

$$\Leftrightarrow 61,86 = a^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow 7,87 = a \quad \text{bzw. } a = 7,87 \text{ cm}$$

2. Schritt: Berechnung der Mantelfläche

Zur Berechnung der Mantelfläche $M = 3 \cdot a \cdot h_s$ benötigt man nun noch die Länge der Seitenhöhe h_s . Diese kann man mit dem Satz des Pythagoras im markierten Dreieck berechnen.

$$\text{Es gilt: } h_s^2 = h^2 + h_1^2 \Rightarrow h_s = \sqrt{h^2 + h_1^2}$$

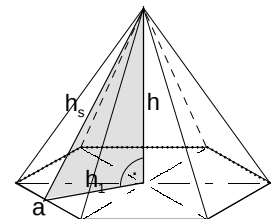
h_1 ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $a = 7,87 \text{ cm}$.

$$\text{Es gilt (siehe Formelsammlung): } h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Mit $a = 7,87 \text{ cm}$ folgt: $h_1 = 6,82 \text{ cm}$

Durch Einsetzen von $h = 14 \text{ cm}$ und $h_1 = 6,82 \text{ cm}$ in $h_s = \sqrt{h^2 + h_1^2}$ erhält man: $h_s = 15,57 \text{ cm}$

Und mit $M = 3 \cdot a \cdot h_s$ folgt schließlich: **$M = 367,61 \text{ cm}^2$**



3. Trigonometrie

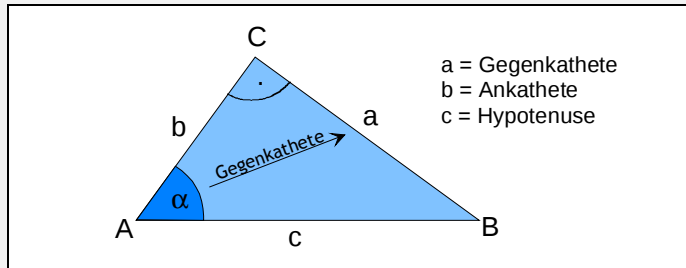
3.1. Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken:

Bezeichnung der Seiten:

Die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind die **Hypotenuse**, die **Ankathete** und die **Gegenkathete**. Die Hypotenuse liegt immer gegenüber dem rechten Winkel. Wie die anderen beiden Seiten bezeichnet werden, hängt davon ab, von welchem Winkel aus man sie betrachtet. Vom Winkel α aus betrachtet ist die **gegenüberliegende** Seite die **Gegenkathete**. Die Kathete, die am Winkel α **anliegt**, nennt man **Ankathete**.



← **Merke**



a = Gegenkathete
b = Ankathete
c = Hypotenuse

Die Winkelfunktionen:

Wie sich die drei Seiten zueinander verhalten, wird durch die drei Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens beschrieben. Es gilt:

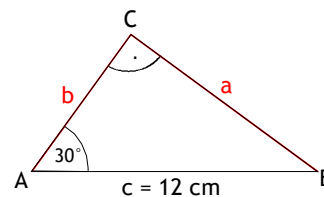
$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Beispiel 1:

Berechnen Sie in folgendem Dreieck die fehlenden Seiten a und b:



Lösung:

Die Hypotenuse ist $c = 12$ cm. Vom Winkel 30° aus betrachtet ist die Seite a die Gegenkathete. Mit der Sinusfunktion erhält man:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{12} \quad | \cdot 12$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot \sin 30^\circ = a$$

$$\Leftrightarrow 6 = a \quad \text{bzw.} \quad \underline{a = 6 \text{ cm}}$$

Die Seite b ist vom Winkel 30° aus betrachtet die Ankathete. Mit der Cosinusfunktion erhält man:

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{12} \quad | \cdot 12$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot \cos 30^\circ = b$$

$$\Leftrightarrow 10,4 = b \quad \text{bzw.} \quad \underline{b = 10,4 \text{ cm}}$$

Tipp: Berechnen eines Winkels mit dem Taschenrechner

Man kann mithilfe des Taschenrechners aus einer Winkelfunktion (beispielsweise aus $\sin \alpha = 0,5$) den entsprechenden Winkel berechnen. Je nach Art des Taschenrechners muss man folgende Tasten tippen:

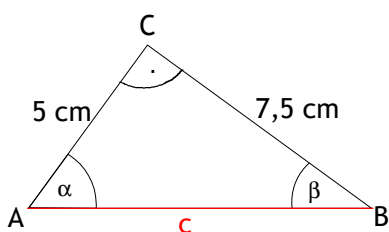
Typ 1: $\boxed{\sec} \rightarrow \boxed{\sin} \rightarrow 0,5 \rightarrow \boxed{=}$

Typ 2: $0,5 \rightarrow \boxed{\sec} \rightarrow \boxed{\sin} \rightarrow \boxed{=}$

Bei $\sin \alpha = 0,5$ erhält man: $\alpha = 30^\circ$

**Beispiel 2:**

Berechnen Sie in folgendem Dreieck die Winkel α und β und die Seite c :

**Lösung:**

Der Winkel α kann mit der Tangensfunktion berechnet werden.

$$\text{Es gilt: } \tan \alpha = \frac{7,5}{5} \Rightarrow \underline{\alpha = 56,3^\circ}$$

Tipp: Einfache Winkelberechnung

Kennt man in einem Dreieck zwei Winkel, erhält man den dritten Winkel mithilfe der Summe der Innenwinkel. Es gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$



Mit $\alpha = 56,3^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$ erhält man für den Winkel β : $\underline{\beta = 33,7^\circ}$

Zur Berechnung der Seite c hat man nun mehrere Möglichkeiten. Man die Strecke c mit dem Satz des Pythagoras oder mit der Cosinusfunktion berechnen. Mit der Cosinusfunktion und dem Winkel $\alpha = 56,3^\circ$ erhält man:

$$\cos 56,3^\circ = \frac{5}{c} \quad | \cdot c$$

$$\Leftrightarrow c \cdot \cos 56,3^\circ = 5 \quad | : \cos 56,3^\circ$$

$$\Leftrightarrow \underline{c = 9,01 \text{ cm}}$$

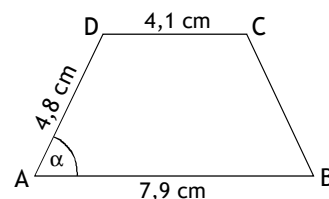
3.2. Berechnungen in Trapezen:

Beispiel 1:

Gegeben ist das gleichschenklige Trapez ABCD.

Es gilt: $\overline{AB} = 7,9 \text{ cm}$; $\overline{BC} = 4,8 \text{ cm}$ und $\overline{CD} = 4,1 \text{ cm}$

Berechnen Sie die Trapezhöhe h und den Winkel α .



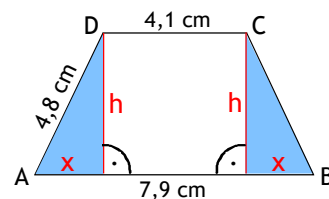
Lösung:

1. Schritt: Einzeichnen der Höhe h und berechnen der Strecke x

Wenn man von den oberen Eckpunkten C und D jeweils die Trapezhöhe h einzeichnet, erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke. In gleichschenkligen Trapezen kann der Abschnitt x aus den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ berechnet werden.

$$\text{Es gilt: } x = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2}.$$

Mit den obigen Werten erhält man: $x = 1,9 \text{ cm}$



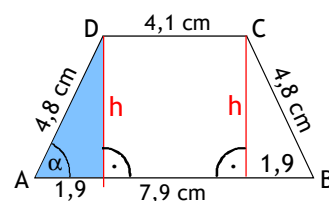
2. Schritt: Berechnen der Höhe h und des Winkels α

Die Höhe h kann nun mit dem Satz des Pythagoras im markierten Dreieck berechnet werden.

Man erhält: $\underline{h = 4,41 \text{ cm}}$

Der Winkel α kann mit der Cosinusfunktion berechnet werden.

$$\text{Es gilt: } \cos \alpha = \frac{1,9}{4,8} \Rightarrow \underline{\alpha = 66,7^\circ}$$



Tipp: Hilfslinien in Trapezen

In jedem Trapez sollte man immer die Höhe jeweils von den beiden oberen Eckpunkten aus einzeichnen. Dadurch entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten bzw. Winkel man oft sehr leicht berechnen kann.



3.3. Berechnungen in Vielecken:

Beispiel 1:

Gegeben ist das Viereck ABCD.

Es gilt:

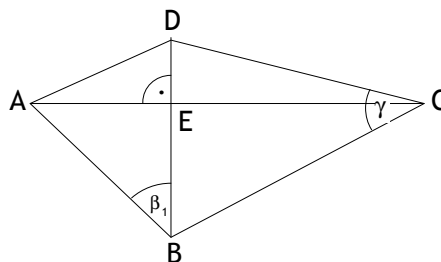
$$\overline{AB} = 5,6 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = 8,2 \text{ cm}$$

$$\beta_1 = 50^\circ$$

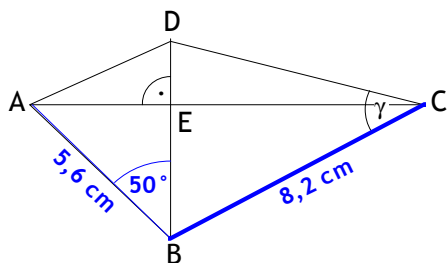
Die Strecke $\overline{DE}$ ist halb so lang wie die Strecke $\overline{BE}$.

Berechnen Sie die Länge $\overline{BD}$ und den Winkel γ .



Lösung:

1. Schritt: Markieren der bekannten Längen und Winkel



Tipp: Cleveres Vorgehen

Oft erkennt man in Vielecken zunächst nicht, wie man überhaupt vorgehen soll, um die gesuchten Längen und Winkel zu berechnen. Dann sollte man folgendermaßen vorgehen:

- Man sucht in der Figur nach einem rechtwinkligen Dreieck, in dem zwei Größen bekannt sind, und berechnet daraus die fehlenden Seiten und Winkel dieses Dreiecks.
- Anschließend trägt man die berechneten Größen in die Figur ein und sucht ein weiteres rechtwinkliges Dreieck, in dem wiederum zwei Größen bekannt sind. Auch in diesem Dreieck berechnet man alle Seiten und Winkel.
- Indem man sich so von einem rechtwinkligem Dreieck zum nächsten vorarbeitet, wird man recht schnell auf die gesuchte Größe stoßen.



2. Schritt: Berechnung eines geeigneten rechtwinkligen Dreiecks

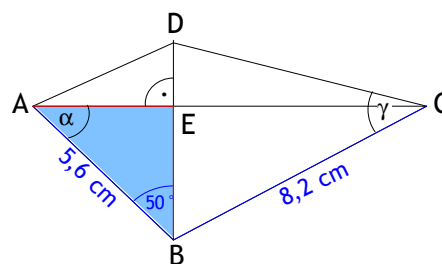
Ein rechtwinkliges Dreieck, in dem zwei Größen bekannt sind, ist das Dreieck ABE.

Die Strecke $\overline{AE}$ kann man mit der Sinusfunktion berechnen. Die Strecke $\overline{BE}$ erhält man mit der Cosinusfunktion.

$$\text{Es gilt: } \sin 50^\circ = \frac{\overline{AE}}{5,6} \Rightarrow \overline{AE} = 4,3 \text{ cm}$$

$$\cos 50^\circ = \frac{\overline{BE}}{5,6} \Rightarrow \overline{BE} = 3,6 \text{ cm}$$

Den Winkel α erhält man mit der Summe der Innenwinkel: $\alpha = 40^\circ$



3. Schritt: Berechnung weiterer Größen

Da die Strecke $\overline{DE}$ halb so lang sein soll wie $\overline{BE}$, erhält man: $\overline{DE} = 1,8 \text{ cm}$

Damit kann man auch die Strecke $\overline{BD} = \overline{BE} + \overline{DE}$ berechnen: $\overline{BD} = 5,4 \text{ cm}$

Ein weiteres rechtwinkliges Dreieck, von dem man nun zwei Größen kennt, ist das **Dreieck BCE**. Darin kann der Winkel γ_1 mit der Sinusfunktion berechnet werden. Die Strecke $\overline{CE}$ lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen.

$$\text{Es gilt: } \sin \gamma_1 = \frac{3,6}{8,2} \Rightarrow \gamma_1 = 26^\circ$$

$$\text{Und: } \overline{CE}^2 = 8,2^2 - 3,6^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{CE}^2 = 54,28 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CE} = 7,37 \text{ cm}$$

Um den gesuchten Winkel $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ berechnen zu können, benötigt man noch den Winkel γ_2 .

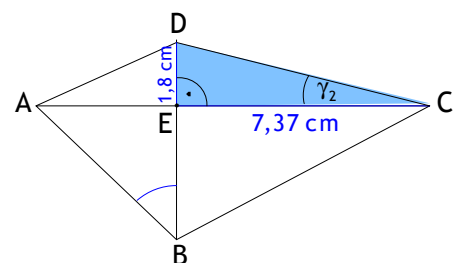
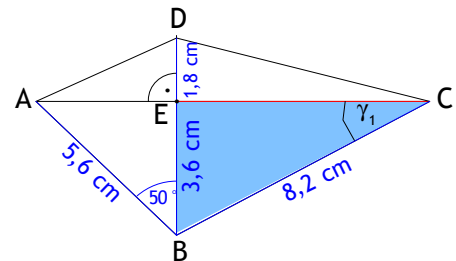
Nun können auch alle Größen im **Dreieck CDE** berechnet werden.

Es gilt:

$$\tan \gamma_2 = \frac{1,8}{7,37} \Rightarrow \gamma_2 = 13,7^\circ$$

Damit folgt mit $\gamma_1 = 26^\circ$ für den Winkel $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$:

$$\underline{\underline{\gamma = 39,7^\circ}}$$

**Beispiel 2:**

Vom Viereck ABCD sind bekannt:

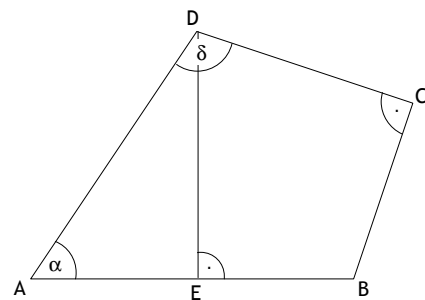
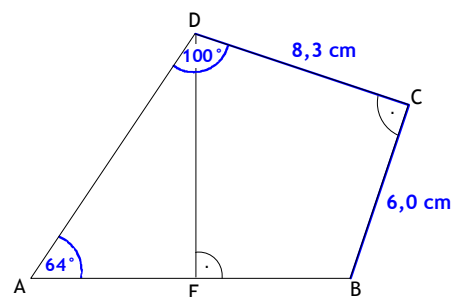
$$\overline{BC} = 6,0 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} = 8,3 \text{ cm}$$

$$\alpha = 64,0^\circ$$

$$\delta = 100,0^\circ$$

Berechnen Sie die Länge $\overline{DE}$.

**Lösung:****1. Schritt: Markieren der gegebenen Größen**


 Tipp: Hilfslinien in beliebigen Vielecken

Oft findet man in einem Vieleck kein rechtwinkliges Dreieck, in dem man mit zwei angegebenen Größen weitere Strecken und Winkel berechnen kann.
In einem solchen Fall muss man Hilfslinien in die Figur einzeichnen - und zwar so, dass wenigstens ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei bekannten Größen entsteht.

Wichtig: Man sollte es zunächst mit **waagrechten und vertikalen Linien** versuchen. Schief liegende Hilfslinien führen bei der weiteren Berechnung oft in die Sackgasse !

2. Schritt: Hilfslinien setzen

In der vorliegenden Figur gibt es zunächst kein rechtwinkliges Dreieck, in dem zwei Größen bekannt sind.

Erst mit den Hilfslinien $\overline{CF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{BG}$ erhält man die rechtwinkligen Dreiecke CDF und BGC.

3. Schritt: Berechnen von Winkeln mit der Summe der Innenwinkel

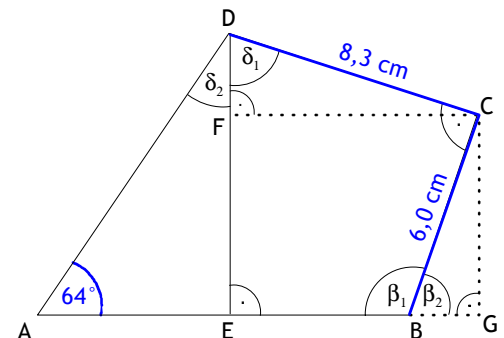
Es gibt zwar auch jetzt noch kein rechtwinkliges Dreieck mit zwei bekannten Größen, aber man kann über die Summe der Innenwinkel im Viereck ABCD den Winkel β_1 berechnen: $\beta_1 = 106^\circ$

(Hinweis: Die Summe der Innenwinkel eines Vielecks beträgt immer 360° .)

Aus $\beta_1 = 106^\circ$ erhält man auch sofort den Nebenwinkel: $\beta_2 = 74^\circ$

Mithilfe der Summe der Innenwinkel im Dreieck AED erhält man den Winkel $\delta_2 = 26^\circ$.

Und mit $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 100^\circ$ kann man dann auch den Winkel δ_1 berechnen: $\delta_1 = 74^\circ$.


4. Schritt: Berechnung rechtwinkliger Dreiecke

Es gibt nun zwei rechtwinklige Dreiecke, in denen alle Seiten und Winkel berechnet werden können: das Dreieck CDF und das Dreieck BGC.

Die Strecke $\overline{FD}$ kann mit der Cosinusfunktion berechnet werden.

$$\text{Im Dreieck CDF gilt: } \cos 74^\circ = \frac{\overline{FD}}{8,3} \Leftrightarrow \overline{FD} = 2,3 \text{ cm}$$

Die Strecke $\overline{EF}$ ist gleich lang wie die Strecke $\overline{CG}$. Und $\overline{CG}$ kann mit der Sinusfunktion im Dreieck BGC berechnet werden.

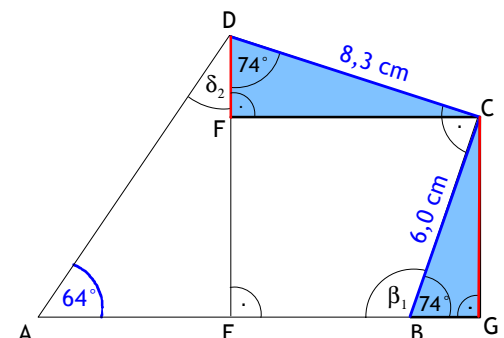
$$\text{Im Dreieck BGC gilt: } \sin 74^\circ = \frac{\overline{CG}}{6,0} \Leftrightarrow \overline{CG} = 5,77 \text{ cm}$$

$$\text{Und damit ist auch: } \overline{EF} = 5,77 \text{ cm}$$

5. Schritt: Berechnung der gesuchten Größe

Nun kann auch die gesuchte Strecke $\overline{DE} = \overline{EF} + \overline{FD}$ berechnet werden.

$$\text{Man erhält: } \overline{DE} = \underline{\underline{8,07 \text{ cm}}}$$



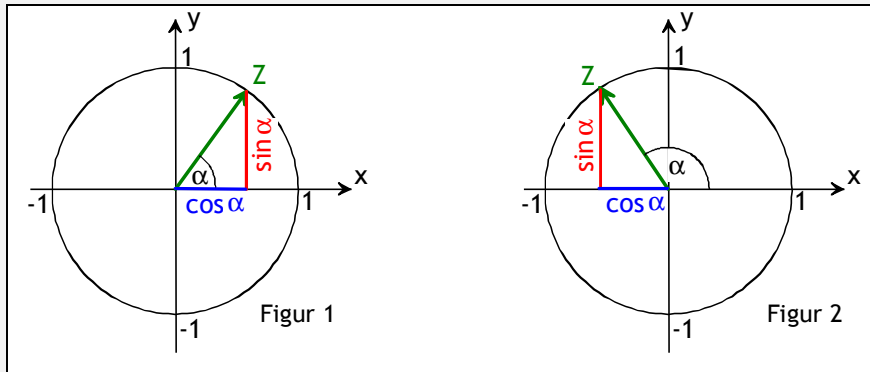
3.4. Sinus und Kosinus im Einheitskreis:

Der **Einheitskreis** ist ein Kreis mit dem Radius $r = 1$ LE (Längeneinheit). Mithilfe des Einheitskreises kann man Sinus- und Kosinuswerte $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ auch für Winkel $\alpha \geq 90^\circ$ definieren. Dabei wird der Winkel α ausgehend von der positiven x-Achse immer entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen (siehe Figur 1 und 2). Es gilt:

- Der Wert von $\sin \alpha$ ist immer die **y-Koordinate** der **Zeigerspitze Z** (siehe Figur 1 und 2).
- Der Wert von $\cos \alpha$ ist immer die **x-Koordinate** der **Zeigerspitze Z** (siehe Figur 1 und 2).



← **Merke**



Beispiel 1:

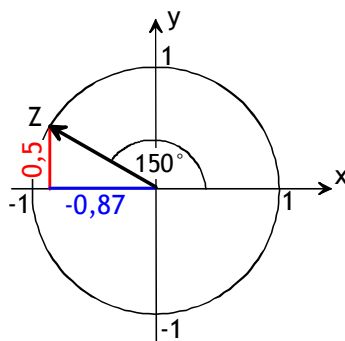
Ermitteln Sie mithilfe eines Einheitskreises für die Winkel $\alpha = 150^\circ$ und $\beta = 300^\circ$ jeweils den Sinus- und den Kosinuswert.

Tipps:

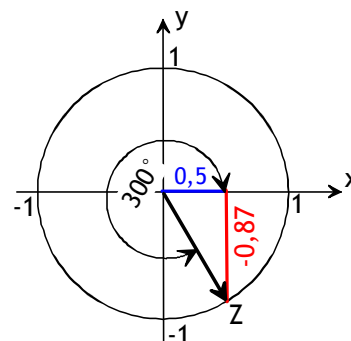
- 1.) Wenn Sie einen Einheitskreis mit dem Radius $1 \text{ LE} = 5 \text{ cm}$ zeichnen, müssen Sie die in cm gemessenen Längen noch durch 5 teilen. (LE = Längeneinheit)
- 2.) Den Winkel 300° können Sie einfacher zeichnen, wenn Sie von der positiven x-Achse ausgehend einen Winkel von 60° nach unten abtragen.

Lösung:

a) Es ist $\sin 150^\circ = 0,5$ und $\cos 150^\circ = -0,87$



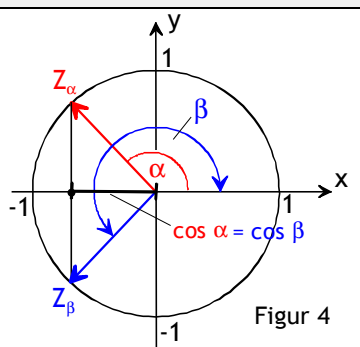
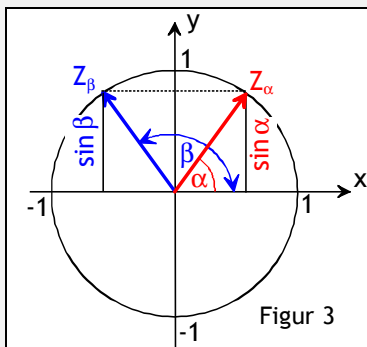
b) Es ist $\sin 300^\circ = -0,87$ und $\cos 300^\circ = 0,5$





Tipp: Vergleich von Sinuswerten bzw. Kosinuswerten:

- Zwei Werte $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ sind gleich, wenn im Einheitskreis die Zeigerstellungen zu den Winkeln α und β **symmetrisch zur y-Achse** sind (siehe Figur 3).
- Zwei Werte $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ sind gleich, wenn im Einheitskreis die Zeigerstellungen zu den Winkeln α und β **symmetrisch zur x-Achse** sind (siehe Figur 4).



Beispiel 2:

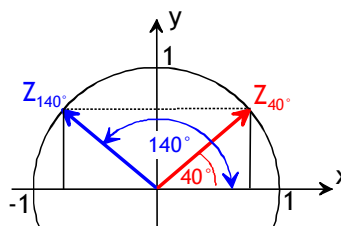
Untersuchen Sie mithilfe eines Einheitskreises, ob folgende Gleichungen gelten:

- a) $\sin 40^\circ = \sin 140^\circ$ b) $\cos 30^\circ = \cos 150^\circ$

Lösung:

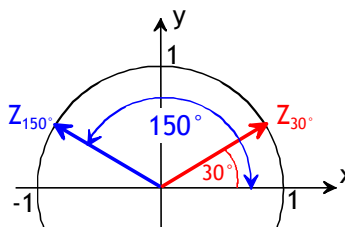
a)

Die Zeiger zu den Winkeln 40° und 140° sind wegen $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ symmetrisch zur y-Achse. Somit gilt:
 $\sin 40^\circ = \sin 140^\circ$



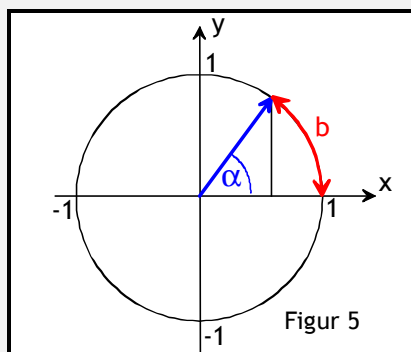
b)

Die Zeiger zu den Winkeln 30° und 150° sind zwar symmetrisch zur y-Achse, aber nicht symmetrisch zur x-Achse. Somit gilt: $\cos 30^\circ \neq \cos 150^\circ$



Grad- und Bogenmaß:

Man kann einen Winkel α auch über die Länge b des aufgespannten Bogens im Einheitskreis angeben (siehe Figur 5). Für die Umrechnung gilt: $b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$ und $\alpha = \frac{b}{\pi} \cdot 180^\circ$



← Merke

3.5. Exkurs: Die Strahlensätze



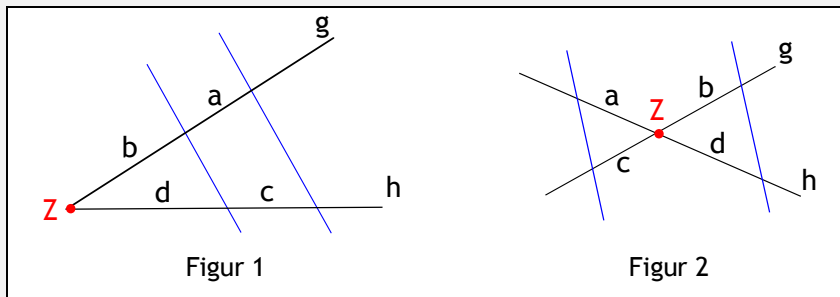
← **Merke**

In einer **Strahlensatzfigur** gelten die beiden Strahlensätze. Eine Strahlensatzfigur besteht aus zwei Geraden g und h , die sich in einem **Zentrum Z** schneiden, und einem **Parallelenpaar**, das die Geraden g und h (= Strahlen) schneidet (siehe Figur 1 und 2).

• **Erster Strahlensatz:**

In Figur 1 gilt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ In Figur 2 gilt: $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$

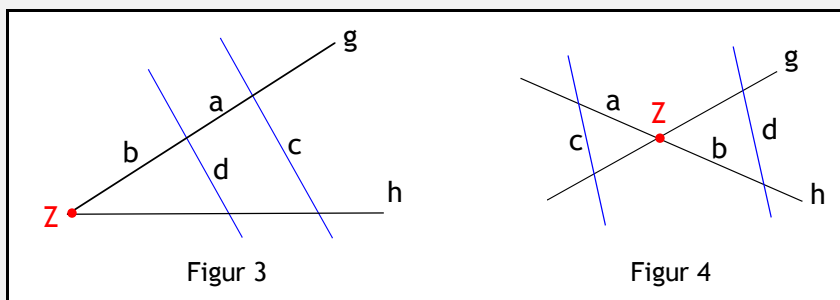
In Worten: Zwei Abschnitte auf dem *einem* Strahl verhalten sich zueinander wie die entsprechenden Abschnitte auf dem *anderen* Strahl.



• **Zweiter Strahlensatz:**

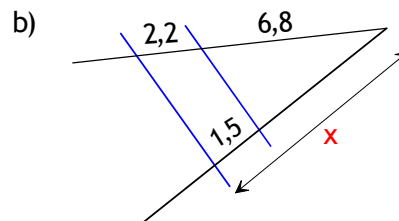
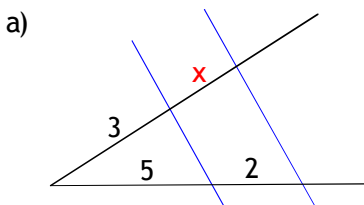
In Figur 3 gilt: $\frac{a+b}{b} = \frac{c}{d}$ In Figur 4 gilt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

In Worten: Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich zueinander wie die (von Z gemessenen) entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl. Dabei gilt: „lang zu kurz gleich lang zu kurz.“ bzw. „kurz zu lang gleich kurz zu lang.“



Beispiel 1:

Berechnen Sie jeweils die fehlende Länge x :



Lösung:

In a) gilt: $\frac{x}{3} = \frac{2}{5} \quad | \cdot 3$

$$\Leftrightarrow x = 1,2$$

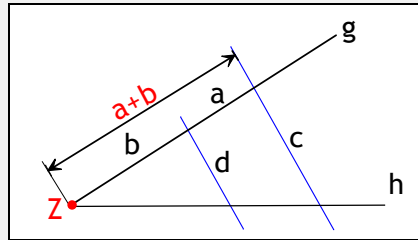
In b) gilt: $\frac{x}{1,5} = \frac{2,2 + 6,8}{2,2}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1,5} = \frac{9,0}{2,2} \quad | \cdot 1,5$$

$$\Leftrightarrow x = 6,14$$

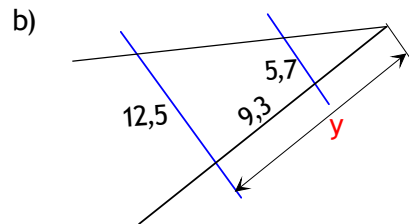
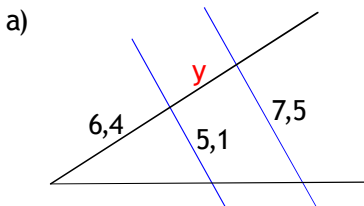


Man beachte: Wenn man den **zweiten Strahlensatz** anwendet, darf man für den Zähler und den Nenner des einen Bruchs nur solche Abschnitte benutzen, die **vom Zentrum Z ausgehen**. In der folgenden Figur sind das die Strecken b und $a + b$.



Beispiel 2:

Berechnen Sie jeweils die fehlende Länge y :



Lösung:

In a) gilt: $\frac{y + 6,4}{6,4} = \frac{7,5}{5,1} \quad | \cdot 6,4$

$$\Leftrightarrow y + 6,4 = 9,41 \quad | -6,4$$

$$\Leftrightarrow y = 3,01$$

In b) gilt: $\frac{y}{y - 9,3} = \frac{12,5}{5,7}$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{y - 9,3} = 2,2 \quad | \cdot (y - 9,3)$$

$$\Leftrightarrow y = 2,2 \cdot (y - 9,3)$$

$$\Leftrightarrow y = 2,2y - 20,46 \quad | -2,2y$$

$$\Leftrightarrow -1,2y = -20,46 \quad | :(-1,2)$$

$$\Leftrightarrow y = 17,05$$

Beispiel 3:

Die Abbildung zeigt eine regelmäßige quadratische Pyramide. Die Punkte P und Q teilen jeweils eine Seitenkante s im Verhältnis 1 : 3. Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

Lösung:

Die Pyramidenspitze S ist das Zentrum der Strahlensatzfigur. Da der Punkt P die Strecke $s = \overline{AS} = 12 \text{ cm}$ im Verhältnis 1 : 3

teilt, gilt: $\overline{PS} = \frac{1}{4} \cdot 12 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$

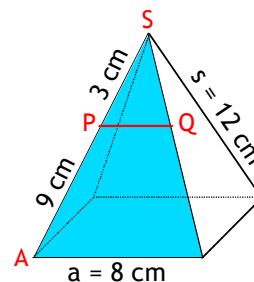
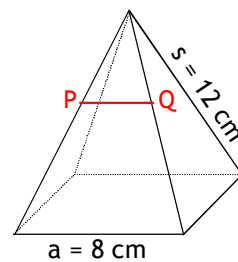
(Hinweis: Eine Strecke teilt man im Verhältnis 1 : 3, indem man sie zunächst in 4 (= 1+3) gleich lange Abschnitte aufteilt.)

Damit erhält man mit dem zweiten Strahlensatz:

$$\frac{8}{\overline{PQ}} = \frac{12}{3} \quad | \cdot \overline{PQ}$$

$$\Leftrightarrow 8 = 4 \cdot \overline{PQ} \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow 2 = \overline{PQ} \quad \text{bzw.} \quad \overline{PQ} = 2 \text{ cm}$$



4. Sachrechnen

4.1. Zinseszins:



← **Merke**

Wichtige Begriffe und Formeln:

Um Aufgaben zum Zinseszins handelt es sich immer dann, wenn ein Kapital oder ein Guthaben über **mehrere Jahre** hinweg angelegt wird, wobei die Zinsen mitverzinst werden. Der Zinssatz kann dabei von Jahr zu Jahr verschieden sein, er kann aber auch unverändert bleiben.

Zur Erinnerung: Zinsen sind der Geldbetrag, um den ein angelegtes Kapital in einem bestimmten Zeitraum zunimmt.

Für die Berechnung von Zinseszins-Aufgaben benötigt man folgende **Formeln**:

$$\text{Zinsfaktor } q = 1 + \frac{p}{100}, \text{ mit dem Zinssatz } p$$

$$K_n = K_0 \cdot q^n, \text{ bei konstantem Zinssatz } p$$

$$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n, \text{ bei verschiedenen Zinssätzen}$$

Darin bedeuten: K_n = Endkapital nach n Jahren

K_0 = Startkapital

p % = Zinssatz, q = Zinsfaktor

Hinweis: Die im Folgenden verwendeten Zinssätze sind zur besseren Anschauung wesentlich höher gewählt als die Zinssätze, die derzeit von den Banken angeboten werden. (Stand: Frühjahr 2020)

Beispiel 1:

Frau Lehmann hat ein Kapital von 8000 € für sieben Jahre zu einem gleichbleibenden Zinssatz angelegt. Am Ende der sieben Jahre hat sie ein Guthaben von 10886,90 €.

Wie hoch war der Zinssatz ?

Lösung:

Durch Einsetzen von $K_0 = 8000$ € und $K_7 = 10886,90$ € in die Formel $K_7 = K_0 \cdot q^7$ erhält man:

$$10886,90 = 8000 \cdot q^7 \quad | : 8000$$

$$\Leftrightarrow 1,3609 = q^7 \quad | \text{ siebte Wurzel ziehen}$$

$$\Leftrightarrow 1,045 = q \text{ bzw. } q = 1,045$$

Damit war der Zinssatz: p % = 4,5 %

Tipp: Berechnen der n-ten Wurzel mit dem Taschenrechner

Gleichungen der Art $q^n = \text{„Zahl“}$ löst man, indem man von der „Zahl“ die n-te Wurzel zieht. Je nach Taschenrechner kann die Tastenfolge unterschiedlich sein. Im obigen Beispiel wurde die 7-te Wurzel von 1,3609 gezogen. Die Tastenfolge ist:

$$1,3609 \rightarrow \boxed{y^x} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{a^b_c} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{=}$$

In Worten: "1,3609 hoch ein Siebtel".



Beispiel 2:

Herr Meier legt für drei Jahre zu folgenden Zinssätzen einen bestimmten Betrag an:

1. Jahr: 3,75 %

2. Jahr: 4,50 %

3. Jahr: 5,25 %

Nach Ablauf der drei Jahre ist sein Kapital auf 13693,29 € angewachsen.

Wie hoch war der eingezahlte Betrag ?

Lösung:**1. Schritt: Berechnung der Zinsfaktoren q**

Mit der Formel $q = 1 + \frac{p}{100}$ erhält man:

1. Jahr: 3,75 % $\rightarrow q_1 = 1,0375$

2. Jahr: 4,5 % $\rightarrow q_2 = 1,045$

3. Jahr: 5,25 % $\rightarrow q_3 = 1,0525$

2. Schritt: Berechnung des Startkapitals

Durch Einsetzen von 13693,29 € und $q_1 = 1,0375$; $q_2 = 1,045$ und $q_3 = 1,0525$ in die Formel $K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$ erhält man:

$$13693,29 = K_0 \cdot 1,0375 \cdot 1,045 \cdot 1,0525$$

$$\Leftrightarrow 13693,29 = K_0 \cdot 1,1411 \quad | :1,1411$$

$$\Leftrightarrow 12000 = K_0 \text{ bzw. } K_0 = 12000 \text{ €}$$

Der eingezahlte Betrag war **12000 €**.

**Tipp: Die Zinseszinstabelle**

Es gibt Aufgaben, die können nicht einfach durch Einsetzen in die oben erwähnten Formeln gelöst werden. Bei solche Aufgaben muss man sich die Entwicklung eines Kapitals mit einer sogenannten Zinseszinstabelle veranschaulichen:

Jahre	Kapital am Jahresanfang	Zinsfaktor q	Kapital am Jahresende	Zinsen
1.				
2.				
3.				

Darin gelten die Regeln:

1. Kapital am Jahresanfang $\cdot q$ = Kapital am Jahresende

2. Kapital am Jahresende – Kapital am Jahresanfang = Zinsen

Beachte: Das Kapital an einem Jahresanfang ist gleich groß wie das Kapital am Ende des vorherigen Jahres.

Beispiel 3:

Klaus-Uwe legt zu Beginn eines Jahres einen bestimmten Geldbetrag an. Der jährlich gleichbleibende Zinssatz beträgt 3,8 %. Am Ende des zweiten Jahres hebt er 500 € ab. Nach 3 Jahren beträgt sein Guthaben 2257,25 €

Berechnen Sie den angelegten Geldbetrag.

Lösung:**1. Schritt: Beschreibung der Kapitalentwicklung**

Zunächst berechnet man aus 3,8 % den entsprechenden Zinsfaktor: $q = 1,038$

Anschließend trägt man $q = 1,038$ und $K_3 = 2257,25$ € in die Zinseszinstabelle ein:

Jahre	Kapital am Jahresanfang	Zinsfaktor q	Kapital am Jahresende
1.	x	1,038	
2.		1,038	
3.		1,038	2257,25

Da man das Startkapital nicht kennt, bezeichnet man es mit der Variable x.

Mit der Regel „Kapital am Jahresanfang $\cdot$ q = Kapital am Jahresende“ kann man die Lücken mit der Variablen x beschreiben:

Jahre	Kapital am Jahresanfang	Zinsfaktor q	Kapital am Jahresende
1.	x	1,038	$1,038 \cdot x$
2.	$1,038 \cdot x - 500$ €	1,038	$1,038 (1,038 \cdot x - 500)$
3.	$1,038 (1,038 \cdot x - 500)$ €	1,038	$1,038 \cdot 1,038 (1,038 \cdot x - 500)$

Man **beachte**, dass man zu Beginn des zweiten Jahres 500 € abziehen muss, da Klaus-Uwe diesen Betrag abhebt.

2. Schritt: Berechnung der Variablen x und der gesuchten Werte

Der Term $1,038 \cdot 1,038 (1,038 \cdot x - 500)$ € ist das Endkapital 2257,25 €. Man erhält also die Gleichung:

$$1,038 \cdot 1,038 (1,038 \cdot x - 500) = 2257,25$$

$$\Leftrightarrow 1,0774 \cdot (1,038 \cdot x - 500) = 2257,25$$

$$\Leftrightarrow 1,118 \cdot x - 538,7 = 2257,25 \quad | +538,7$$

$$\Leftrightarrow 1,118 \cdot x = 2795,95 \quad | :1,118$$

$$\Leftrightarrow x = 2500,85 \approx 2500 \text{ €}$$

Klaus-Uwe hat also **2500 €** angelegt.

4.2. Ratensparen:

Wichtige Begriffe:

Beim Ratensparen wird jeweils zu Beginn eines Jahres ein fester Betrag eingezahlt - eben die sogenannte **Rate**. Die Entwicklung des Kapitals kann mit folgender Tabelle veranschaulicht werden:

Jahre	Rate	Kapital am Jahresanfang	Zinsfaktor q	Kapital am Jahresende	Zinsen
1.					
2.					
3.					

Beachte: Das Kapital an einem Jahresanfang erhält man, indem man zum Kapital am Ende des vorherigen Jahres die Rate dazuzählt. Ansonsten gelten dieselben Regeln wie in der oben erwähnten Zinseszinstabelle.



← **Merke**

Beispiel:

Cornelia möchte mit einem Ratensparvertrag innerhalb von 4 Jahren ein Vermögen von 20000 € aufbauen. Ihre Bank bietet folgende Zinssätze an:

- 1. Jahr: 2,75 %
- 2. Jahr: 3,50 %
- 3. Jahr: 4,00 %
- 4. Jahr: 4,50 %

Welche jährliche Rate muss Cornelia einzahlen, um ihr Sparziel zu erreichen ?

Lösung:

1. Schritt: Berechnung der Zinsfaktoren

Zunächst wandelt man alle Zinssätze in die entsprechenden Zinsfaktoren $q = 1 + \frac{p}{100}$ um:

- 1. Jahr: 2,75 % → $q_1 = 1,0275$
- 2. Jahr: 3,50 % → $q_2 = 1,035$
- 3. Jahr: 4,00 % → $q_3 = 1,04$
- 4. Jahr: 4,50 % → $q_4 = 1,045$

2. Schritt: Einsetzen in die Zinseszinstabelle

Durch Einsetzen der bekannten Werte in die obige Tabelle erhält man:

Jahre	Rate	Kapital am Jahresanfang	Zinsfaktor q	Kapital am Jahresende	Zinsen
1.	x	x	1,0275		
2.	x		1,035		
3.	x		1,04		
4.	x		1,045	20 000 €	

Die unbekannte Rate wird mit der Variable x bezeichnet.

3. Schritt: Berechnung der Lücken

Mit den oben erwähnten Regeln erhält man für die Lücken der Tabelle:

Jahre	Rate	Kapital am Jahresanfang	Zinsfaktor q	Kapital am Jahresende	Zinsen
1.	x	x	1,0275	1,0275x	nicht gefragt
2.	x	2,0275x	1,035	1,035 · 2,0275x = 2,0985x	nicht gefragt
3.	x	3,0985x	1,04	1,04 · 3,0985x = 3,2224x	nicht gefragt
4.	x	4,2224x	1,045	1,045 · 4,2224x = 20 000 €	nicht gefragt

Man beachte, dass jeweils am Jahresanfang der Term **1x** addiert werden muss !

4. Schritt: Berechnung der Variablen x

Auflösen der Gleichung $1,045 \cdot 4,2224x = 20\,000 \text{ €}$ nach x ergibt:

$$1,045 \cdot 4,2224x = 20\,000$$

$$\Leftrightarrow 4,4124x = 20000 \quad | : 4,4124$$

$$\Leftrightarrow x = 4532,68$$

Die jährliche Rate beträgt also **4532,68 €** .

4.3. Zinsrechnung:

Um Aufgaben zur Zinsrechnung handelt es sich immer dann, wenn ein Kapital über **mehrere Tage oder Monate** hinweg zu einem festen Zinssatz angelegt wird. Zur Berechnung dieser Aufgaben benötigt man folgende **Formeln**:

$$Z_t = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} \quad , \quad Z_m = \frac{K \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}$$

Darin bedeuten: Z_t = Zinsen nach t Tagen, Z_m = Zinsen nach m Monaten

K = Startkapital

$P \%$ = Zinssatz



← **Merke**

Beispiel 1:

Herbert hat sein Konto 20 Tage lang um 250 € überzogen. Seine Bank berechnet ihm dafür einen Zinssatz von 13 %. Wie viel Zinsen muss Herbert an seine Bank zahlen ?

Tipp: Aufgaben zur Zinsrechnung löst man, indem man die angegebenen Werte in eine der beiden obigen Formeln einsetzt und nach der unbekannten Größe auflöst.



Lösung:

Im Beispiel sind: $p \%$ = 13 % , K = 250 € und t = 20 Tage

Durch Einsetzen in $Z_t = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$ erhält man: $Z_t = \frac{250 \cdot 13 \cdot 20}{100 \cdot 360} = 1,81 \text{ €}$

Herbert muss **1,81 €** Zinsen an seine Bank zahlen.

Beispiel 2:

Paul legt ein Kapital von 1500 € zu einem Zinssatz von 4 % an. Er möchte damit 50 € Zinsen erzielen. Nach wie vielen Tagen hat er dies erreicht ?

Lösung:

Im Beispiel sind: Z_t = 50 €, $p \%$ = 4 % und K = 1500 €

Durch Einsetzen in $Z_t = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$ erhält man: $50 = \frac{1500 \cdot 4 \cdot t}{100 \cdot 360}$

$$\Leftrightarrow 50 = 0,167 t \quad | : 0,167$$

$$\Leftrightarrow 300 = t \text{ bzw. } t = 300 \text{ Tage}$$

Paul bekommt nach **300 Tagen** 50 € Zinsen.

4.4. Erhöhter und verringerter Grundwert:

Bei **prozentualen Veränderungen** wird ein Wert um einen bestimmten Prozentsatz vergrößert oder verkleinert. Dabei ist der ursprüngliche Wert immer der Grundwert. Den neuen Wert nennt man den **erhöhten bzw. verringerten Grundwert**. Für die Lösung dieser Aufgaben benötigt man folgende Formeln:

$$G_+ = G \cdot q_+ \quad \text{mit} \quad q_+ = 1 + \frac{p}{100}$$

$$G_- = G \cdot q_- \quad \text{mit} \quad q_- = 1 - \frac{p}{100}$$

Darin bedeuten: G = Grundwert (ursprünglicher Wert)

G_+ = erhöhter Grundwert, G_- = verringerter Grundwert

q_+ und q_- sind die Veränderungsfaktoren

$p\%$ = Prozentsatz



← **Merke**

Beispiel 1:

Frau Müller hat eine Gehaltserhöhung von 2,5 % bekommen. Nun verdient sie 2750 € im Monat. Wie hoch war ihr Gehalt vorher ?

Lösung:

Die bekannten Werte sind: $G_+ = 2750$ € und $p\% = 2,5\%$. Damit ist $q_+ = 1,025$.

Durch Einsetzen in die Formel $G_+ = G \cdot q_+$ erhält man:

$$2750 = G \cdot 1,025 \quad | : 1,025$$

$$\Leftrightarrow 2682,93 = G \quad \text{bzw.} \quad G = \underline{2682,93 \text{ €}}$$

Frau Müller hat also ursprünglich 2682,93 € verdient.

Tipps:

1. Der Wert, der **zeitlich weiter zurückliegt**, ist immer der Grundwert G .
2. Bei **Mehrwertsteuer-Aufgaben** ist der Wert ohne die Mehrwertsteuer immer der Grundwert G . Der Preis mit Mehrwertsteuer ist der erhöhte Grundwert. (Hinweis: Die Mehrwertsteuer ist der Anteil eines Preises, den ein Händler für jede verkaufte Ware an das Finanzamt zahlen muss. Ab Januar 2007 sind das 19 % eines Warenpreises.)



Beispiel 2:

Eine Jeanshose kostet mit Mehrwertsteuer 68,50 €. Wie hoch ist die darin enthaltene Mehrwertsteuer, wenn der Steuersatz 19 % beträgt ?

Lösung:

Die bekannten Werte sind: $G_+ = 68,50$ € und $p\% = 19\%$

Damit ist $q_+ = 1,19$.

Durch Einsetzen in die Formel $G_+ = G \cdot q_+$ erhält man: $68,50 = G \cdot 1,19 \quad | : 1,19$

$$\Leftrightarrow 57,56 = G \quad \text{bzw.} \quad G = \underline{57,56 \text{ €}}$$

Ohne Mehrwertsteuer hat die Jeanshose 57,56 € gekostet.

Wenn ein Grundwert **mehrmals nacheinander** prozentual verändert wird, muss man mit folgender Formel rechnen:

$$G_{\pm} = G \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \dots$$

Darin bedeuten: G = Grundwert (ursprünglicher Wert)

G_+ = erhöhter Grundwert, G_- = verringerter Grundwert

$q_1, q_2 \dots$ sind die jeweiligen Veränderungsfaktoren



← **Merke**

Beispiel 3:

Auf einen PC werden 20 % Rabatt gewährt. Er kostet nun (inkl. MwSt) 1450 €.

Wie viel hat der Computer ohne Rabatt und ohne Mehrwertsteuer (= 19 %) gekostet ?

Lösung:

Der veränderte Grundwert ist $G_{\pm} = 1450$ €.

(Hinweis: Da der Rabatt verringert und die Mehrwertsteuer erhöht, weiß man hier noch nicht, ob es sich insgesamt um einen erhöhten oder verringerten Grundwert handelt.)

Die Veränderungsfaktoren sind: $q_1 = 1,19$ (Mehrwertsteuer) und $q_2 = 0,80$ (Rabatt)

Durch Einsetzen in die Formel $G_{\pm} = G \cdot q_1 \cdot q_2$ erhält man:

$$1450 = G \cdot 1,19 \cdot 0,80$$

$$\Leftrightarrow 1450 = G \cdot 0,952 \quad | : 0,952$$

$$\Leftrightarrow 1523,11 = G \text{ bzw. } G = 1523,11 \text{ €}$$

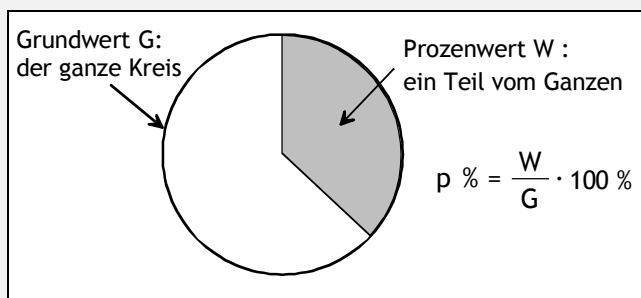
Der PC hat also ursprünglich **1523,11 €** ohne Rabatt und ohne Mehrwertsteuer gekostet.

4.5. Prozentrechnung:

Bei Aufgaben zur Prozentrechnung muss immer eine der drei Größen **Prozentwert W**, **Grundwert G** und **Prozentsatz $p\% = p : 100$** berechnet werden. p ist die Prozentzahl.

Die dazu benötigte **Formel** ist: $W = \frac{p \cdot G}{100}$

Zur Erinnerung: Der Grundwert ist immer das Ganze, der Prozentwert ist ein Teil von diesem Ganzen, und der Prozentsatz beschreibt den Anteil des Prozentwerts am Grundwert als Bruch.



← **Merke**

Beispiel 1:

Bei einem Tischtennisturnier wird insgesamt ein Preisgeld in Höhe von 16000 € ausgeschüttet. 45 % davon dürfen sich die beiden Finalisten teilen, wobei der Sieger 60 % erhält.

Wie viel Geld bekommt der Sieger und wie viel der Zweite ?

Lösung:

Die Aufgabe besteht aus zwei Teilen. Zunächst muss das Preisgeld berechnet werden, das beide Finalisten zusammen erhalten.

Bekannt sind: $G = 16000 \text{ €}$ und $p\% = 45\%$

Durch Einsetzen in die Formel $W = \frac{p \cdot G}{100}$ ergibt sich: $W = \frac{45 \cdot 16000}{100} = 7200 \text{ €}$

Zusammen erhalten beide Finalisten also **7200 €**.

Im zweiten Teil der Aufgabe sind diese 7200 € der Grundwert, da sich die beiden Finalisten diesen Betrag teilen müssen.

Mit dem neuen Prozentsatz $p_2\% = 60\%$ und $G_2 = 7200 \text{ €}$ folgt durch Einsetzen in die Formel $W = \frac{p \cdot G}{100}$:

$$W_2 = \frac{60 \cdot 7200}{100} = 4320 \text{ €}$$

Der Sieger darf sich also über **4320 €** freuen. Der Zweite bekommt immerhin noch **2880 €**.

Beispiel 2:

Die Schüler einer Schule benutzen für ihren Schulweg folgende Verkehrsmittel:

Bus: 40 % Fahrrad: 25 % Zu Fuß: 15 % Mofa: 85 Schüler Auto: 12 Schüler

Wie viele Schüler gehen in diese Schule ? Stellen Sie die Verteilung in einem Kreisdiagramm dar.

Tipp: Alle Prozentsätze zusammen ergeben immer **100 %** !



Lösung:Berechnung der Schülerzahl:

Die Zahl der Schüler, die insgesamt auf diese Schulen gehen, ist der Grundwert G.

Die Zahl der Schüler, die mit Mofa und Auto zur Schule kommen, sind 97 Schüler. Da die Verkehrsmittel der anderen Schüler 80 % ausmachen, entsprechen diesen 97 Schülern die übrigen 20 %.

Es ist also: $W = 97$ Schüler und $p \% = 20 \%$

Durch Einsetzen in die Formel $W = \frac{p \cdot G}{100}$ erhält man:

$$97 = \frac{20 \cdot G}{100}$$

$$\Leftrightarrow 97 = 0,20 \cdot G \quad | : 0,2$$

$$\Leftrightarrow 485 = G \quad \text{bzw.} \quad G = 485 \text{ Schüler}$$

Es gehen also insgesamt **485 Schüler** in diese Schule.

Tipp:

Will man eine prozentuale Verteilung in einem Kreisdiagramm darstellen, muss man alle Prozentsätze in Grad umrechnen. Dabei gilt: $1 \% \triangleq 3,6^\circ$

Die entsprechende Gradzahl ist der Öffnungswinkel des jeweiligen Kreisausschnitts.

Darstellung im Kreisdiagramm:

Zunächst muss man berechnen, welchen Prozentsätzen die 85 Schüler (Mofa) und die 12 Schüler (Auto)

entsprechen. Mit der Formel $p = \frac{W}{G} \cdot 100$ erhält man: **85 Schüler $\triangleq 17,5 \%$** und **12 Schüler $\triangleq 2,5 \%$**

Die Winkel der entsprechenden Kreisausschnitte erhält man, indem man die jeweilige Prozentzahl mit $3,6^\circ$ multipliziert. Es ergibt sich also:

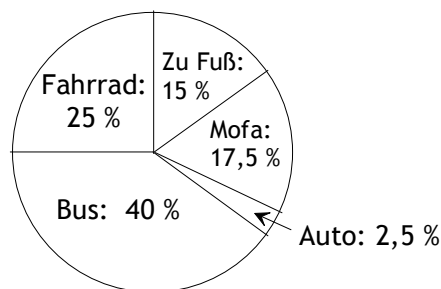
Bus: $40 \% \triangleq 144^\circ$

Fahrrad: $25 \% \triangleq 90^\circ$

Zu Fuß: $15 \% \triangleq 54^\circ$

Mofa: $17,5 \% \triangleq 63^\circ$

Auto: $2,5 \% \triangleq 9^\circ$



5. Daten erfassen

5.1. Beschreibung statistischer Daten:

Beispiel:

Larissa möchte ihren Spielwürfel testen und notiert sich von 24 Würfeln die Augenzahlen:

Nummer des Wurfs:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Gefallene Augenzahl:	3	3	1	6	5	3	1	6	2	2	4	6

Nummer des Wurfs:	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.
Gefallene Augenzahl:	5	3	4	6	1	2	5	3	5	1	1	3

Zur Auswertung solcher Daten muss man zunächst das sogenannte **Merkmal X** der Daten festlegen. Im Beispiel ist dies die gefallene Augenzahl. Die jeweils beobachteten **Merkmalswerte** bezeichnet man mit x_i . (Der Index i steht hier für die Nummer des Wurfs.) So ist x_1 die Augenzahl des 1. Wurfs: $x_1 = 4$.

Schreibt man nun alle Datenwerte x_i der Reihe nach auf, erhält man eine sogenannte **Urliste**. Die Länge der Urliste ist der **Stichprobenumfang** n . Im Beispiel ist $n = 24$.

Die Urliste lautet: 3 3 1 6 5 3 1 6 2 2 4 6 5 3 4 6 1 2 5 3 5 1 1 3

5.2. Absolute und relative Häufigkeiten:

Nun möchte Larissa wissen, wie oft die einzelnen Augenzahlen gefallen sind und erstellt dazu folgende Tabelle:

Augenzahl:	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit h_i :	5	3	6	2	4	4

Diese Statistik gibt an, wie oft die einzelnen Merkmalswerte (= Augenzahlen) beobachtet wurden. Die Zahl, die angibt, wie oft ein Merkmalswert vorkommt, nennt man **absolute Häufigkeit** h_i .

So ist beispielsweise $h_3 = 6$, da die Augenzahl 3 insgesamt 6-mal gefallen ist. Die anderen absoluten Häufigkeiten sind: $h_1 = 5$, $h_2 = 3$, $h_4 = 2$, $h_5 = 4$ und $h_6 = 4$.

Zählt man alle absoluten Häufigkeiten zusammen, erhält man den Stichprobenumfang (hier $n = 24$):

$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = n$, und mit Werten: $5 + 3 + 6 + 2 + 4 + 4 = 24$

Die Werte der absoluten Häufigkeiten ändern sich mit zunehmendem Stichprobenumfang. Bei einem Würfelexperiment mit 100 Würfeln wird man natürlich viel öfter die einzelnen Augenzahlen beobachten. Um daher verschiedene Datenerhebungen miteinander vergleichen zu können, muss man die absolute Häufigkeiten immer auf den Stichprobenumfang n beziehen.

Man erhält so die **relativen Häufigkeiten** $r_i = \frac{h_i}{n}$.

In einer **Häufigkeitstabelle** sind die absoluten und relativen Häufigkeiten den Merkmalswerten zugeordnet:

Augenzahlen:	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit h_i :	5	3	6	2	4	4
Relative Häufigkeit r_i :	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$
Angabe in Prozent p_i %:	20,8 %	12,5 %	25 %	8,3 %	16,7 %	16,7 %

Die Summe der relativen Häufigkeiten ergibt immer 1: $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = 1$

Die relativen Häufigkeiten können auch in Prozent angegeben werden. Es gilt: $p_i \% = r_i \cdot 100 \%$

5.3. Schwerpunkte von Häufigkeitsverteilungen:

Charakteristische Werte einer Häufigkeitsverteilung sind der **Durchschnitt** (= arithmetische Mittelwert), der **Zentralwert z** (= Median) und der **Modalwert m** (= häufigster Wert). Diese 3 Werte nennt man auch Schwerpunkte einer Häufigkeitsverteilung.

- Den **Durchschnitt** $\bar{x}$ berechnet man mit folgender Formel: $\bar{x} = r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 + \dots + r_n \cdot x_n$

In Worten: Man bildet jeweils das Produkt zwischen relativer Häufigkeit und Merkmalswert, und addiert anschließend alle Produkte.

Im Beispiel erhält man: $\bar{x} = \frac{5}{24} \cdot 1 + \frac{3}{24} \cdot 2 + \frac{6}{24} \cdot 3 + \frac{2}{24} \cdot 4 + \frac{4}{24} \cdot 5 + \frac{4}{24} \cdot 6 = 3,375 \approx 3,4$

Im Durchschnitt fällt also die Augenzahl „3,4“.

Wenn jeder Merkmalswert x_i nur einmal vorkommt, gilt für den Durchschnitt $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

- Den **Zentralwert z** (= Median) bestimmt man mithilfe einer geordneten Urliste bzw. Rangliste. Darin sind alle beobachteten Werte in aufsteigender Reihenfolge notiert. Im Beispiel lautet die geordnete Urliste:

1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6

Die Mitte dieser Urliste gibt dann den Zentralwert an. Alternativ kann z auch mit $n \cdot \frac{1}{2}$ berechnet werden (s.u.).

Da bei einer geraden Anzahl an Messwerten zwei Werte die Mitte der Urliste bilden, muss man den Mittelwert dieser beiden Werte berechnen. Im Beispiel erhält man: $z = 3$

- Der **Modalwert m** ist derjenige Wert in der Urliste, der am häufigsten vorkommt. Im Beispiel ist: $m = 3$.

5.4. Boxplots:

Verschiedene Häufigkeitsverteilungen kann man mithilfe sogenannter Boxplot-Diagramme anschaulich miteinander vergleichen. Um ein solches Boxplot-Diagramm zu erstellen, benötigt man folgende **Kennwerte** der geordneten Urliste bzw. Rangliste:

- Den **größten Wert** $x_{\max}$ der Rangliste und den **kleinsten Wert** $x_{\min}$ der Rangliste.
- Zur Bestimmung des **unteren Quartils** q_u muss man die Zahl n der Ranglistenwerte mit $\frac{1}{4}$ multiplizieren.
- Zur Bestimmung des **oberen Quartils** q_o muss man die Zahl n der Ranglistenwerte mit $\frac{3}{4}$ multiplizieren.

Ist das Ergebnis $n \cdot \frac{1}{4}$ bzw. $n \cdot \frac{3}{4}$ nicht ganzzahlig, nimmt man den Wert des nächsthöheren Platzes in der Rangliste.

- Zur Bestimmung des **Zentralwerts z** muss man die Zahl n der Ranglistenwerte mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren. Ist das Ergebnis $n \cdot \frac{1}{2}$ nicht ganzzahlig, nimmt man den Wert des nächsthöheren Platzes in der Rangliste.

In der geordneten Urliste des obigen Beispiels ist $x_{\max} = 6$ und $x_{\min} = 1$.

Mit $n = 24$ erhält man: $24 \cdot \frac{1}{4} = 6$. Also liegt das untere Quartil am 6. Platz der Rangliste. Es ist also $q_u = 2$.

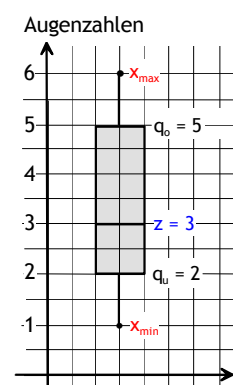
$24 \cdot \frac{3}{4}$ ist 18, sodass das obere Quartil am 18. Platz der Rangliste liegt: $q_o = 5$

Entsprechend erhält man für den Zentralwert: $z = 3$ (Wert am 12. Platz)

1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6

Mit diesen Kennwerten kann man schließlich das Boxplot-Diagramm erstellen:

Die Werte, die zwischen $q_u = 2$ und $q_o = 5$ liegen, machen 50 % aller beobachteten Werte aus. Diesen Bereich stellt man als Box dar. Von dieser Box aus zeichnet man dann jeweils einen Strich zum maximalen bzw. minimalen Wert der Urliste. Somit entfallen die übrigen 50 % aller Werte auf die beiden „Antennen“.



6. Wahrscheinlichkeitsrechnung

6.1. Zufall und Wahrscheinlichkeit - die Laplace-Formel:

Wenn man einen Würfel wirft, kann man selbstverständlich nie vorhersagen, welche Augenzahl fallen wird. Man weiß lediglich, dass es eine Zahl zwischen 1 und 6 sein muss. Einen solchen Vorgang, dessen Ausgang bzw. Ergebnis ungewiss ist, nennt man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein **Zufallsexperiment**. Sind alle möglichen Versuchsausgänge gleich wahrscheinlich, spricht man von einem **Laplace-Experiment** (nach dem französischen Mathematiker Laplace, 1749-1827).

Die **Wahrscheinlichkeit** P_A , mit der ein bestimmtes Ereignis A (zum Beispiel das Erscheinen einer geraden Augenzahl) eintritt, ergibt sich aus einem Laplace-Experiment mit folgender Formel:

$$P_A = \frac{\text{Anzahl der Ausgänge, bei denen A eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ausgänge}}$$

(Hinweis: Statt des Begriffs „Ausgang“ wird oft auch der Begriff „Ergebnis“ verwendet.)

Beispiel 1:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Werfen eines idealen Würfels eine Augenzahl fällt, die kleiner als 3 ist.

Lösung:

Es gibt zwei Augenzahlen (1 und 2), die diese Eigenschaft erfüllen. Bei einem idealen Würfel ist somit die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Augenzahl kleiner als 3“: $P_A = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Zu jedem Ereignis A gibt es auch ein sogenanntes **Gegenereignis** $\bar{A}$, das genau das Gegenteil beschreibt.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses A und seines Gegenereignisses $\bar{A}$ ist immer 1.

Es gilt: $P_{\bar{A}} = 1 - P_A$.

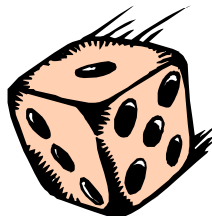
Beispiel 2:

Wie lautet das Gegenereignis zum Ereignis A: „Augenzahl kleiner als 3“, und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dieses Gegenereignisses?

Lösung:

Das Gegenereignis zum Ereignis A: „Augenzahl kleiner als 3“ ist $\bar{A}$: „Augenzahl größer oder gleich 3“.

Mit der Formel $P_{\bar{A}} = 1 - P_A$ folgt: $P_{\bar{A}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.



6.2. Zweistufige Zufallsexperimente, Baumdiagramme und die Pfadregel:

Wenn man eine Münze zweimal hintereinander wirft, können folgende Ausgänge bzw. Ergebnisse eintreten: (Z; Z) , (Z; W) , (W; Z) , (W; W)

Dabei ist das Einzelergebnis „Zahl“ mit Z bezeichnet und das Einzelergebnis „Wappen“ mit W.

So bedeutet das Ergebnis (Z; W), dass beim ersten Wurf „Zahl“ fällt und beim zweiten Wurf „Wappen“. Man nennt einen solchen Vorgang ein **zweistufiges Zufallsexperiment**.

6.2.1 Das Baumdiagramm und die Pfadregel:

Jedes zweistufige bzw. mehrstufige Zufallsexperiment kann in einem sogenannten **Baumdiagramm** veranschaulicht werden:

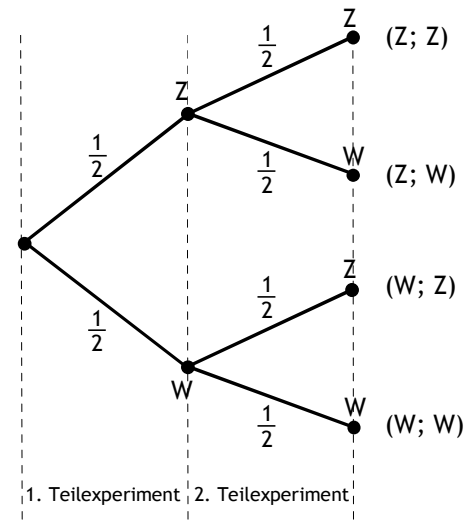
Darin beschriftet man die Knotenpunkte immer mit den Einzelergebnissen (im Fall des Münzwurfes mit Z oder W). Am Ende eines Pfads notiert man in Form eines geordneten Pairs das Ergebnis.

Die Wahrscheinlichkeiten für die Einzelergebnisse schreibt man auf die Äste. Beim Werfen einer idealen Münze ist diese Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ergebnisses erhält man, indem man die Einzelwahrscheinlichkeiten eines Pfades miteinander multipliziert. Im Beispiel erhält man:

$$P(Z;Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} ; \quad P(Z;W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(W;Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} ; \quad P(W;W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



Man nennt dies die **Pfadregel**.

6.2.2. Zusammengesetzte Ereignisse:

Oft setzt sich ein Gesamtereignis aus mehreren Ergebnissen zusammen. Zum Beispiel gehören zum Ereignis A: „Es fällt mindestens einmal Wappen“ die drei Ergebnisse (Z; W) , (W; Z) und (W; W).

Die Wahrscheinlichkeit eines solchen zusammengesetzten Ereignisses berechnet man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Gesamtereignis gehören, **addiert**.

Dies ist die **Summenregel**.

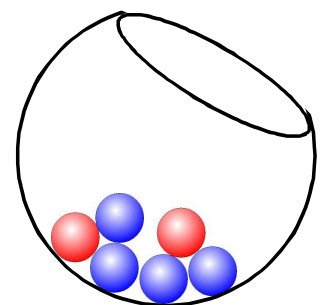
Es gilt also: $P(\text{mind. einmal Wappen}) = P(Z; W) + P(W; Z) + P(W; W)$.

Und mit Werten: $P(\text{mind. einmal Wappen}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Beispiel 1:

In einer Urne befinden sich 4 blaue, 2 rote Kugeln. Uschi zieht zweimal hintereinander eine Kugel, ohne hinzusehen. Nach dem ersten Ziehen legt sie die Kugel wieder in die Urne zurück.

Erstellen Sie ein Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Uschi zwei gleichfarbige Kugeln zieht ?



Lösung:

Insgesamt befinden sich in der Urne 6 Kugeln. Somit sind die Teilwahrscheinlichkeiten für das Ziehen:

$$\rightarrow \text{einer blauen Kugel: } p(\text{blau}) = \frac{4}{6}$$

$$\rightarrow \text{einer roten Kugel: } p(\text{rot}) = \frac{2}{6}$$

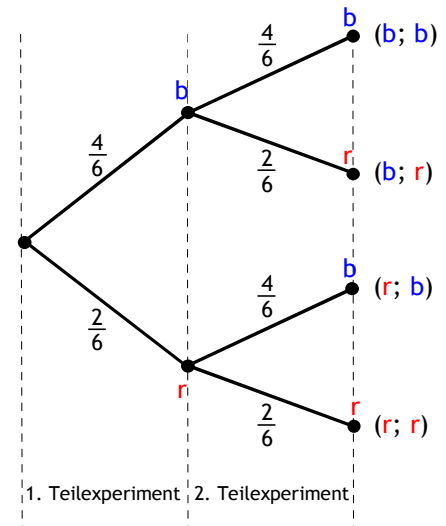
Das Ereignis, dass zwei gleiche Farben gezogen werden, setzt sich aus den Ergebnissen (b; b) und (r; r) zusammen.

Mit der Pfadregel erhält man:

$$P(b; b) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36}; \quad P(r; r) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit des Gesamtereignisses:

$$P(\text{zwei gleiche Farben}) = P(b; b) + P(r; r) = \frac{16}{36} + \frac{4}{36} = \frac{20}{36}$$

**Beispiel 2:**

Das abgebildete Glücksrad wird zweimal gedreht.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der erhaltenen Zahlen genau 10 ergibt?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der erhaltenen Zahlen genau 7 ist?

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer Zahl kann aus den Mittelpunktswinkeln berechnet werden. Man beachte, dass der ganze Kreis 360° entspricht.

Damit folgt für die Wahrscheinlichkeiten beim einmaligen Drehen:

$$\text{Erscheinen der „5“: } P(5) = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Erscheinen der „2“: } P(2) = \frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der erhaltenen Zahlen genau 10 ergibt, tritt dann ein, wenn zweimal die „5“ erscheint.

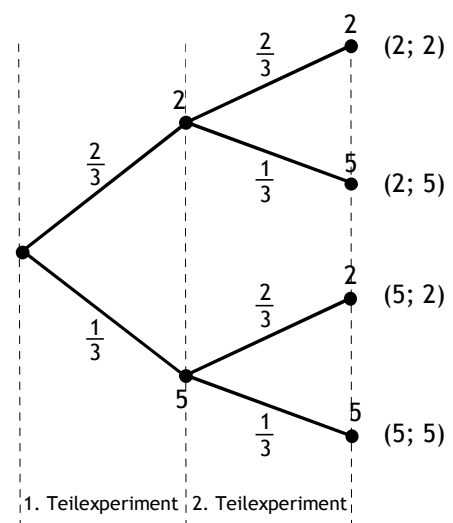
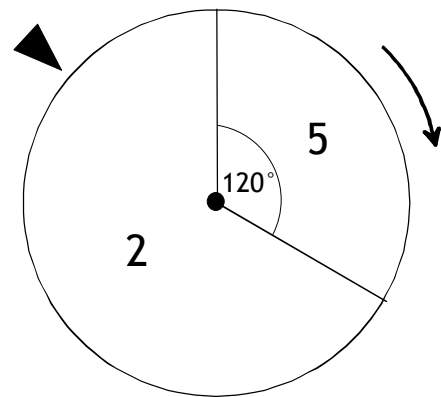
$$\text{Mit der Pfadregel erhält man: } P(5; 5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der erhaltenen Zahlen genau 7 ergibt, tritt dann ein, wenn einmal die „5“ und einmal die „2“ erscheint.

$$\text{Es ist also: } P(\text{Summe} = 7) = P(5; 2) + P(2; 5)$$

$$\text{Mit der Pfadregel gilt: } P(5; 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \text{ und } P(2; 5) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\text{Damit folgt: } P(\text{Summe} = 7) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$



6.3. Berechnung des Erwartungswerts:

Wenn man den Ausgängen (= Ergebnissen) eines Zufallsexperiments wie einem Glücksspiel Zahlenwerte zuordnen kann, kann man dafür einen sogenannten **Erwartungswert** berechnen. Der Erwartungswert gibt an, mit welchem Gewinn ein Spieler bzw. der Veranstalter bei einem Glücksspiel im Schnitt rechnen kann.

Beispiel:

Bei einem Würfelspiel gelten folgende Regeln: Wenn ein Spieler eine Augenzahl größer als 4 wirft, erhält er vom Veranstalter des Glücksspiels 2 € ausbezahlt; bei Augenzahlen kleiner oder gleich 4 nur 0,50 €. Der Einsatz pro Spiel beträgt 1,50 €.

Würde sich dieses Spiel aus Sicht eines Spielers lohnen ?

Lösung:

Für den zu erwartenden Gewinn eines Glücksspiels mit den Ausgängen A und B gilt (aus Sicht eines Spielers):

$$E = P(A) \cdot X_A + P(B) \cdot X_B - \text{Einsatz}$$

Darin sind X_A bzw. X_B die Beträge, die an den Spieler ausbezahlt werden, wenn die Spielausgänge A bzw. B

eintreten. Im vorliegenden Beispiel ist: $P(A) = \frac{2}{6}$ und $P(B) = \frac{4}{6}$.

Mit $X_A = 2$ € und $X_B = 0,50$ € folgt für den zu erwartenden Gewinn (aus Sicht eines Spielers):

$$E = \frac{2}{6} \cdot 2 \text{ €} + \frac{4}{6} \cdot 0,50 \text{ €} - 1,50 \text{ €} = -0,50 \text{ €}$$

Ein Spieler würde bei diesem Spiel also im Schnitt einen Verlust (= „negativer Gewinn“) von 0,50 € machen. Somit würde sich das Spiel aus Sicht eines Spielers nicht lohnen.

Beachte:

1. Aus Sicht des Veranstalters müsste man natürlich die Auszahlungsbeträge X_A bzw. X_B negativ werten und den Spieleinsatz positiv. Dann würde für den Erwartungswert gelten:

$$E_{\text{Veranst}} = \frac{2}{6} \cdot (-2 \text{ €}) + \frac{4}{6} \cdot (-0,50 \text{ €}) + 1,50 \text{ €} = +0,50 \text{ €}$$

2. Wenn nur nach dem zu erwartenden Auszahlungsbetrag E_{Aus} gefragt ist, darf man den Spieleinsatz nicht berücksichtigen. Dann gilt: $E_{\text{Aus}} = P(A) \cdot X_A + P(B) \cdot X_B$