



Teil A₁ und A₂ - Pflichtteil:

Pflichtteil A1	2
Pflichtteil A2	7

Teil B - Wahlteil:

Aufgabe W1a	15
Aufgabe W1b	18
Aufgabe W2a	21
Aufgabe W2b	23
Aufgabe W3a	25
Aufgabe W3b	27

Wichtige Hinweise zum Copyright:

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und nur für die eigene Nutzung zugelassen. Kopieren und Vervielfältigen der vorliegenden Datei ist verboten! Jede Nutzung in anderen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags.

Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung vervielfältigt oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Ausgenommen von diesen Regelungen ist die **Verwendung für folgende Unterrichtszwecke:**

So dürfen Lehrkräfte die vorliegende Datei zu Unterrichtszwecken ausdrucken, mit elektronischen Projektionsverfahren (wie Laptop und Beamer) einsetzen und OHP-Folien erstellen. Verboten ist allerdings die Weitergabe der Datei auf elektronischen Datenträgern.

Verstöße werden strafrechtlich verfolgt!

© Mathematik-Verlag 2026, Mosbach

Mathematik-Verlag Rainer Hild
Steige 44-2
74821 Mosbach
Internet: <https://matheverlag.com>
E-Mail: info@matheverlag.com

Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A1



Aufgabe 1:

Die Höhe der quadratischen Pyramide:

Für das Volumen eines Quaders gilt: $V_Q = a \cdot b \cdot c$

Für das Volumen der quadratischen Pyramide gilt: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a_{Pyr}^2 \cdot h_{Pyr}$

Mit $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ und $c = 2 \text{ cm}$ erhält man: $V_Q = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2 \cdot 2 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^3$

Da die Pyramide das gleiche Volumen haben soll, gilt: $V_{Pyr} = 24 \text{ cm}^3$

Einsetzen von $V_{Pyr} = 24 \text{ cm}^3$ und $a_{Pyr} = 3 \text{ cm}$ in $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a_{Pyr}^2 \cdot h_{Pyr}$ ergibt:

$$24 \text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \cdot (3 \text{ cm})^2 \cdot h_{Pyr}$$

$$\Leftrightarrow 24 \text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \cdot 9 \text{ cm}^2 \cdot h_{Pyr}$$

$$\Leftrightarrow 24 \text{ cm}^3 = 3 \text{ cm}^2 \cdot h_{Pyr} \quad | : 3 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow 8 \text{ cm} = h_{Pyr} \quad \text{bzw.} \quad h_{Pyr} = 8 \text{ cm}$$

Ergebnis: Die Höhe der quadratischen Pyramide ist $h_{Pyr} = 8 \text{ cm}$.

Aufgabe 2:

- Die **Wahrscheinlichkeit x**, beim ersten Zug eine blaue Kugel zu ziehen, kann man mit der „Knotenregel“ berechnen. Demnach muss die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, die von einem Knotenpunkt eines Baumdiagramms ausgehen, den Wert 1 haben.

Somit muss gelten: $25\% + \frac{7}{20} + x = 1$

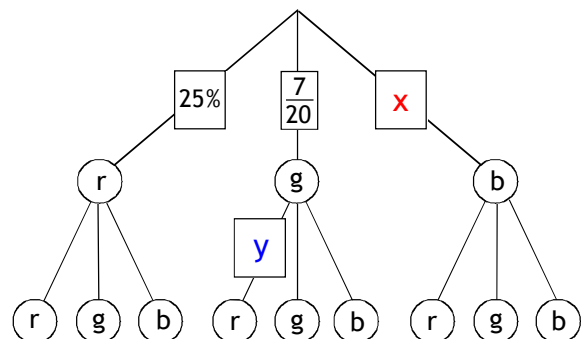
Mit $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ folgt:

$$\frac{1}{4} + \frac{7}{20} + x = 1 \quad | -\frac{1}{4} - \frac{7}{20}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{4} - \frac{7}{20}$$

Erweitern der Brüche auf den Hauptnenner 20 ergibt mit $1 = \frac{20}{20}$ und $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{5}{20}$:

$$x = \frac{20}{20} - \frac{5}{20} - \frac{7}{20} = \frac{20-5-7}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 40\%$$



- Die **Wahrscheinlichkeit y**, beim zweiten Zug eine rote Kugel zu ziehen, kann man mit folgender

Überlegung bestimmen: Aus der Wahrscheinlichkeit $P_1(r) = 25\% = \frac{1}{4} = \frac{5}{20}$ folgt, dass vor dem ersten

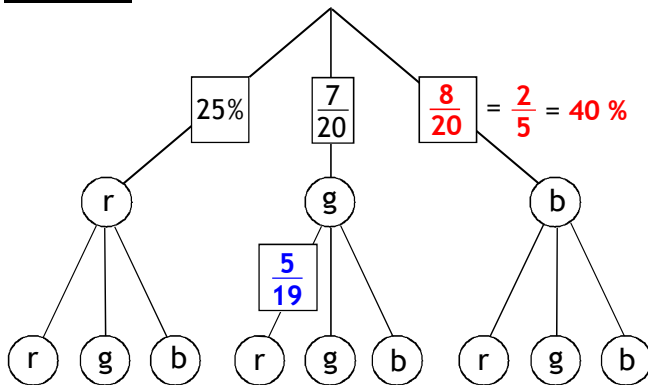
Zug **5 rote Kugeln** in dem Behälter sind. Wenn beim ersten Zug eine grüne Kugel (g) gezogen wird, sind nur noch 19 Kugeln in dem Behälter (Ziehen ohne Zurücklegen). Davon sind immer noch 5 Kugeln

rot. Somit ist die **Wahrscheinlichkeit y** $= \frac{5}{19}$.

Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A1



Ergebnis:



Aufgabe 3:

Der Term mit dem größten Wert:

Um die Terme nach ihrer Größe vergleichen zu können, muss man sie ohne die Zehnerpotenzschreibweise ausdrücken. Dabei geht man nach folgenden Regeln vor:

- In den Termen, wo eine **Dezimalzahl mit einer Zehnerpotenz** multipliziert wird, muss man das Komma um so viele Stellen nach rechts verschieben, wie der (positive) Exponent angibt. In den Fällen (A), (B) und (C) muss man dafür die fehlenden Dezimalstellen noch mit Nullen ergänzen.
- Im Term (D), wo eine **ganze Zahl mit einer Zehnerpotenz** multipliziert wird, muss man der ganzen Zahl lediglich so viele Nullen anfügen, wie der Exponent der Zehnerpotenz angibt.

Mit diesen Regeln erhält man:

(A) Kommaverschiebung um 6 Stellen nach rechts:

$$0,0025 \cdot 10^6 = 0,0025\mathbf{000} \cdot 10^6 = \mathbf{2500,0} = \mathbf{2500}$$

(B) Kommaverschiebung um 4 Stellen nach rechts:

$$0,025 \cdot 10^4 = 0,025\mathbf{00} \cdot 10^4 = \mathbf{250,0} = \mathbf{250}$$

(C) Kommaverschiebung um 5 Stellen nach rechts:

$$2,5 \cdot 10^5 = 2,5\mathbf{00000} \cdot 10^4 = \mathbf{250000,0} = \mathbf{250\,000}$$

(D) Anfügen von 2 Nullen an 250:

$$250 \cdot 10^2 = 250\mathbf{00} = \mathbf{25000}$$

Ergebnis: Der Term (C) $2,5 \cdot 10^5 = 250\,000$ hat den größten Wert.

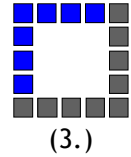
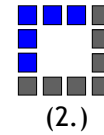
Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A1



Aufgabe 4:

a) Die Anzahl der Kärtchen für das 6. Muster:

Von einem Muster zum nächsten nehmen die obere und die untere Zeile des Musters um je 1 Kärtchen zu. Außerdem wachsen die linke und die rechte senkrechte Reihe um je 1 Kärtchen. Also nimmt die Anzahl der Kärtchen von einem Muster zum nächsten immer um 4 Kärtchen zu.



Somit erhält man folgende Anzahlen:

3. Muster: $5 + 5 + 3 + 3 = 16$ Kärtchen (durch Abzählen)

4. Muster: $16 \text{ Kärtchen} + 4 \text{ Kärtchen} = 20 \text{ Kärtchen}$

5. Muster: $20 \text{ Kärtchen} + 4 \text{ Kärtchen} = 24 \text{ Kärtchen}$

6. Muster: $24 \text{ Kärtchen} + 4 \text{ Kärtchen} = 28 \text{ Kärtchen}$

Ergebnis: Luana benötigt für das 6. Muster 28 Kärtchen.

b) Die richtigen Formeln zur Berechnung der Anzahl der Kärtchen:

Zum Testen der Formeln muss man eine Probe machen. Zum Beispiel hat das 1. Muster 8 Kärtchen. Damit ist $n = 1$ und $s = 8$. Einsetzen von $n = 1$ und $s = 8$ in die jeweiligen Formeln ergibt:

In $s = 4n + 4$: $8 = 4 \cdot 1 + 4 \Leftrightarrow 8 = 4 + 4 \Leftrightarrow 8 = 8$; **wahre Aussage**

In $s = 2n + 4$: $8 = 2 \cdot 1 + 4 \Leftrightarrow 8 = 2 + 4 \Leftrightarrow 8 = 6$; **falsche Aussage**

In $s = 4n + 2$: $8 = 4 \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow 8 = 4 + 2 \Leftrightarrow 8 = 6$; **falsche Aussage**

In $s = (n + 2)^2 - n^2$: $8 = (1 + 2)^2 - 1^2 \Leftrightarrow 8 = 9 - 1 \Leftrightarrow 8 = 8$; **wahre Aussage**

Streng genommen müsste man auch die Probe mit den s - und n -Werten der anderen Muster machen, um die wahren Aussagen zu bestätigen. Dem Term $s = 4n + 4$ kann man es aber ansehen, dass die Anzahl s um 4 größer wird, wenn der Wert von n um 1 zunimmt. Es gilt nämlich:

$$s_{n+1} = 4(n + 1) + 4 = 4n + 4 + 4 = s_n + 4$$

Dies entspricht genau der Regel, dass die Anzahl (s) der Kärtchen von einem Muster zum nächsten um 4 zunimmt (siehe oben).

Hinweis:

Wenn man die Formel $s = (n + 2)^2 - n^2$ mithilfe der ersten binomischen Formel vereinfacht, erhält man: $s = (n + 2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4$. Das ist identisch mit der ersten Formel $s = 4n + 4$.

Ergebnis:

	richtig	falsch
$s = 4n + 4$	☒	☐
$s = 2n + 4$	☐	☒
$s = 4n + 2$	☐	☒
$s = (n + 2)^2 - n^2$	☒	☐

Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A1

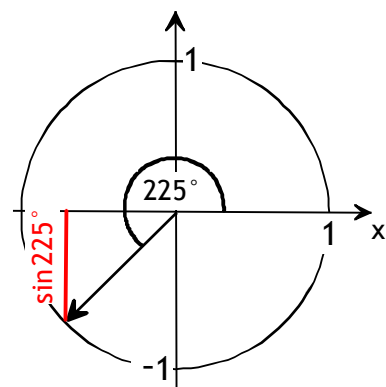
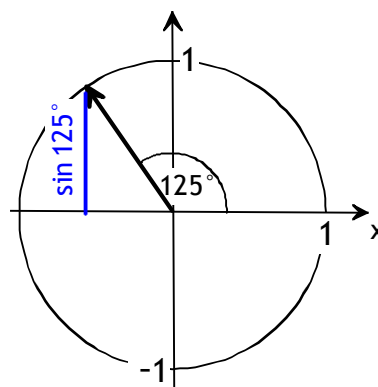
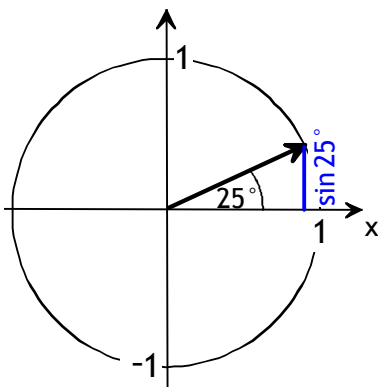


Aufgabe 5:

Positive und negative Sinuswerte:

Die Vorzeichen der einzelnen Sinuswerte kann man sich an einem Einheitskreis klarmachen. Der senkrechte Abstand der Zeigerspitze zur x-Achse ist der jeweilige Sinuswert. Darin erkennt man:

- $\sin 25^\circ$ liegt im 1. Quadrant des Einheitskreises und ist daher positiv.
- $\sin 125^\circ$ liegt im 2. Quadrant des Einheitskreises und ist daher positiv.
- $\sin 225^\circ$ liegt im 3. Quadrant des Einheitskreises und ist daher negativ.



Ergebnis:

	positiv	negativ
$\sin 25^\circ$	☒	☐
$\sin 125^\circ$	☒	☐
$\sin 225^\circ$	☐	☒

Aufgabe 6:

a) Selinas Fehler beim Erstellen des Boxplots:

Um Selinas Fehler zu finden, muss man die charakteristischen Werte des Boxplots anhand der Rangliste bestimmen und mit Selinas Boxplot vergleichen. Die Rangliste umfasst 17 Werte.

- Den **kleinsten und den größten Wert** der Rangliste $x_{\min} = 30 \text{ cm}$ und $x_{\max} = 150 \text{ cm}$ hat Selina in ihrem Boxplot richtig eingezeichnet.
- Der **Zentralwert** der Rangliste befindet sich wegen $\frac{1}{2} \cdot 17 = 8,5$ am 9. Platz der Rangliste. Das ist der Wert $z = 60 \text{ cm}$. Diesen Wert hat Selina in ihrem Boxplot auch richtig bestimmt.
- Das **untere Quartil** q_u der Rangliste befindet sich wegen $\frac{1}{4} \cdot 17 = 4,25$ am 5. Platz der Rangliste. Das ist der Wert $q_u = 50 \text{ cm}$. Diesen Wert hat Selina ebenfalls richtig bestimmt.
- Das **obere Quartil** q_o der Rangliste befindet sich wegen $\frac{3}{4} \cdot 17 = 12,75$ am 13. Platz der Rangliste. Das ist der Wert $q_o = 80 \text{ cm}$. Selina hat aber das obere Quartil mit 90 cm bestimmt. Das war ihr Fehler.

30 | 30 | 30 | 50 | **50** | 50 | 50 | 50 | **60** | 60 | 70 | 80 | **80** | 80 | 90 | 100 | **150**

Ergebnis: Selina hat das obere Quartil falsch bestimmt. Der richtige Wert ist $q_o = 80 \text{ cm}$.

Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A1



b) Überprüfen von Selinas Behauptung:

Weil einer der beiden neuen Werte (40 cm) links vom bisherigen Zentralwert $z = 60$ cm liegt und der andere neue Wert (120 cm) rechts von $z = 60$ cm liegt, ändert sich der Zentralwert nicht.

Alternativ kann man auch die neue Rangliste aufschreiben und darin den Zentralwert bestimmen.

Darin liegt der Zentralwert wegen $\frac{1}{2} \cdot 19 = 9,5$ beim 10. Platz und hat nach wie vor den Wert $z = 60$ cm.

Ergebnis: Selinas Behauptung stimmt.

Aufgabe 7:

a) Der prozentuale Anteil der Personen, die mit der Bahn zur Arbeit fahren:

Die 400 befragten Personen sind der Grundwert $G = 400$ Personen. Die Anzahl der Personen, die mit der Bahn zur Arbeit fahren, sind der Prozentwert $W = 80$ Personen (siehe Diagramm).

80 Personen von 400 Personen entsprechen dem Prozentsatz $p\% = \frac{80}{400} \cdot 100\% = \frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%$

Ergebnis: Von den 400 befragten Personen fahren 20 % mit der Bahn zur Arbeit.

Hinweis: Besonders schnell kann man diese Aufgabe mit Hilfe der Bruchrechnung lösen:

80 Personen von 400 Personen sind $\frac{80}{400}$. Durch Kürzen mit 4 erhält man: $\frac{80}{400} = \frac{20}{100} = 20\%$.

Zur Erinnerung: Das Prozentzeichen “%” ist eine Abkürzung für die Rechenoperation „durch 100“.

Es gilt also: $p\% = \frac{p}{100}$ bzw. umgekehrt $\frac{p}{100} = p\%$.

b) Die Anzahl der Frauen, die mit einem Elektroauto zur Arbeit fahren:

• Zunächst muss man die Anzahl der Frauen (= Prozentwert W) berechnen, die mit dem Auto zur Arbeit fahren. Mit $p_1\% = 40\%$ und dem Grundwert $G_1 = 150$ Personen erhält man:

40% von 150 Personen $= \frac{40}{100} \cdot 150$ Personen $= \frac{4}{10} \cdot 150$ Personen $= 4 \cdot 15$ Personen $= 60$ Frauen

• Anschließend muss man diese 60 Frauen als neuen Grundwert $G_2 = 60$ Frauen betrachten. Mit $p_2\% = 15\%$ und $G_2 = 60$ Frauen erhält man:

15% von 60 Frauen $= \frac{15}{100} \cdot 60$ Frauen $= \frac{3}{20} \cdot 60$ Frauen $= \frac{180}{20}$ Frauen $= 9$ Frauen

Ergebnis: Es fahren 9 Frauen mit einem Elektroauto zur Arbeit.



Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A2

Aufgabe 1:

Lösungsübersicht:

Für den Umfang des Rechtecks ABCD gilt: $u_{ABCD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$. Mit $\overline{AD} = \overline{BC} = 4,6 \text{ cm}$ und $\overline{CD} = \overline{AB}$ folgt (siehe Figur 1): $u_{ABCD} = 2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC} = 2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot 4,6 \text{ cm} = 2 \cdot \overline{AB} + 9,2 \text{ cm}$

Man muss also die Strecke $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF}$ berechnen.

- Die Strecke $\overline{BF}$ kann mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck FBC berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{CF}$ kennt (siehe Figur 1). $\overline{CF}$ kann mit der Sinusfunktion im Dreieck EFC berechnet werden.
- Die Strecke $\overline{AF}$ kann im Dreieck AFE mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{EF}$ und den Winkel α kennt (siehe Figur 2). Die Strecke $\overline{EF}$ erhält man mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck EFC (siehe Figur 2). Für den Winkel α gilt: $\alpha + 90^\circ + \beta = 180^\circ$. Den Winkel β kann man im Dreieck FBC mit der Sinusfunktion berechnen (siehe Figur 2 und 3).

Der Umfang des Vierecks bzw. Rechtecks ABCD:

Für den Umfang u des Rechtecks ABCD gilt (siehe Figur 1): $u_{ABCD} = 2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot 4,6 \text{ cm} = 2 \cdot \overline{AB} + 9,2 \text{ cm}$

→ Berechnung der Strecke $\overline{AB}$:

Für die Strecke $\overline{AB}$ gilt (siehe Figur 1): $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF}$

- Die Strecke $\overline{BF}$ kann im Dreieck FBC mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 1). Darin gilt:

$$\overline{CF}^2 = (4,6 \text{ cm})^2 + \overline{BF}^2$$

Die Strecke $\overline{CF}$ kann im Dreieck EFC mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1). Darin gilt:

$$\sin 49^\circ = \frac{\overline{CF}}{7,2} \quad | \cdot 7,2$$

$$\Leftrightarrow 7,2 \cdot \sin 49^\circ = \overline{CF}$$

$$\Leftrightarrow 5,43 = \overline{CF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{CF} = 5,43 \text{ cm}$$

Einsetzen in $\overline{CF}^2 = (4,6 \text{ cm})^2 + \overline{BF}^2$ ergibt:

$$(5,43 \text{ cm})^2 = (4,6 \text{ cm})^2 + \overline{BF}^2$$

$$\Leftrightarrow 29,48 \text{ cm}^2 = 21,16 \text{ cm}^2 + \overline{BF}^2 \quad | -21,16 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow 8,32 \text{ cm}^2 = \overline{BF}^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow 2,88 \text{ cm} = \overline{BF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{BF} = 2,88 \text{ cm}$$

- Die Strecke $\overline{AF}$ kann im Dreieck AFE mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel α und die Strecke $\overline{EF}$ kennt (siehe Figur 2).

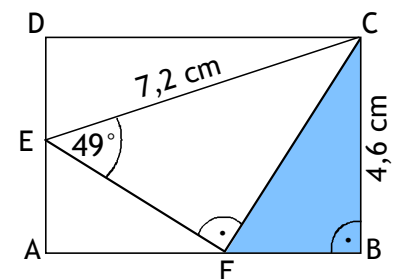
Mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck EFC erhält man für die Strecke $\overline{EF}$ (siehe Figur 2):

$$(7,2 \text{ cm})^2 = (5,43 \text{ cm})^2 + \overline{EF}^2$$

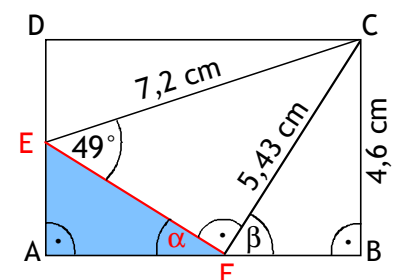
$$\Leftrightarrow 51,84 \text{ cm}^2 = 29,48 \text{ cm}^2 + \overline{EF}^2 \quad | -29,48 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow 22,36 \text{ cm}^2 = \overline{EF}^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow 4,73 \text{ cm} = \overline{EF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{EF} = 4,73 \text{ cm}$$



Figur 1



Figur 2



Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A2

Für den Winkel α gilt (siehe Figur 3): $\alpha + 90^\circ + \beta = 180^\circ$

Den Winkel β kann man im Dreieck FBC mit der Sinusfunktion berechnen. Darin gilt (siehe Figur 3):

$$\sin \beta = \frac{4,6}{5,43}$$

$$\Leftrightarrow \sin \beta = 0,847 \quad | \sin^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{\beta = 57,9^\circ}$$

Damit folgt für den Winkel α :

$$\alpha + 90^\circ + 57,9^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 147,9^\circ = 180^\circ \quad | -147,9^\circ$$

$$\Leftrightarrow \underline{\alpha = 32,1^\circ}$$

Die Strecke $\overline{AF}$ kann nun im Dreieck AFE mit der Kosinusfunktion berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 4):

$$\cos 32,1^\circ = \frac{\overline{AF}}{4,73} \quad | \cdot 4,73$$

$$\Leftrightarrow 4,73 \cdot \cos 32,1^\circ = \overline{AF}$$

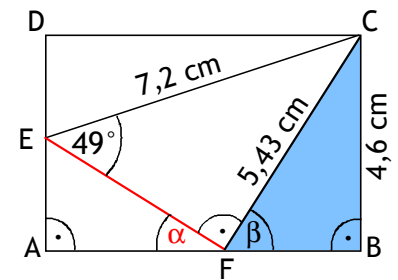
$$\Leftrightarrow 4,01 = \overline{AF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AF} = 4,01 \text{ cm}$$

Einsetzen von $\overline{AF} = 4,01 \text{ cm}$ und $\overline{BF} = 2,88 \text{ cm}$ in $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF}$ ergibt: $\overline{AB} = 6,89 \text{ cm}$

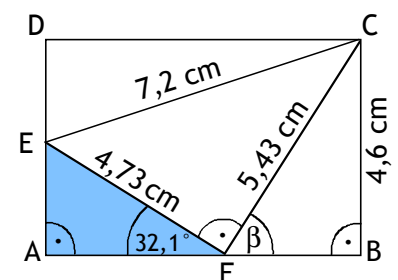
Damit erhält man für $u_{ABCD} = 2 \cdot \overline{AB} + 9,2 \text{ cm}$:

$$u_{ABCD} = 2 \cdot 6,89 \text{ cm} + 9,2 \text{ cm} = \mathbf{22,98 \text{ cm} \approx 23 \text{ cm}}$$

Ergebnis: Der Umfang des Vierecks ABCD ist $u_{ABCD} = 22,98 \text{ cm} \approx 23 \text{ cm}$.



Figur 3



Figur 4

Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A2



Aufgabe 2:

Berechnung des Pyramidenvolumens:

Für das Pyramidenvolumen gilt: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$

→ Berechnung der Grundfläche G:

Die Grundfläche G der Pyramide setzt sich aus 5 identischen gleichschenkligen Dreiecken zusammen (siehe Figur 1).

Es gilt: $G = 5 \cdot A_{BCD}$

Für den Flächeninhalt A_{BCD} gilt (siehe Figur 1): $A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

• Die **Grundkante** a kann in dem markierten Dreieck der Figur 2 mit der Sinusfunktion berechnet werden. Man beachte dazu, dass die Höhe h_s der Seitenfläche BCS den Winkel $\varphi = 40^\circ$ und die Grundkante $a = \overline{BC}$ halbiert. Es gilt (siehe Figur 2):

$$\sin 20^\circ = \frac{0,5a}{12,0} \quad | \cdot 12,0$$

$$\Leftrightarrow 12,0 \cdot \sin 20^\circ = 0,5a \quad | : 0,5$$

$$\Leftrightarrow 8,21 = a \text{ bzw. } a = 8,21 \text{ cm}$$

• Die **Strecke** h_a kann im Dreieck BCD mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 3).

(Man beachte: Der Winkel γ bei D ist $360^\circ : 5 = 72^\circ$ und wird von der Höhe h_a halbiert.)

Es gilt (siehe Figur 3):

$$\tan 36^\circ = \frac{4,105}{h_a} \quad | \cdot h_a$$

$$\Leftrightarrow h_a \cdot \tan 36^\circ = 4,105 \quad | : \tan 36^\circ$$

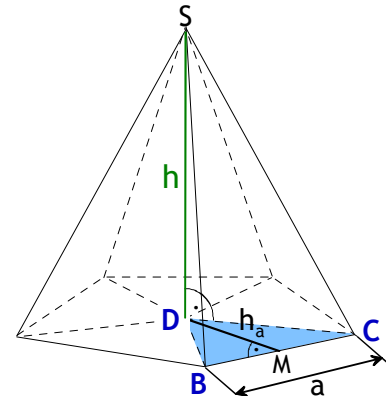
$$\Leftrightarrow h_a = 5,65 \text{ cm}$$

Einsetzen von $a = 8,21 \text{ cm}$ und $h_a = 5,65 \text{ cm}$ in $A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

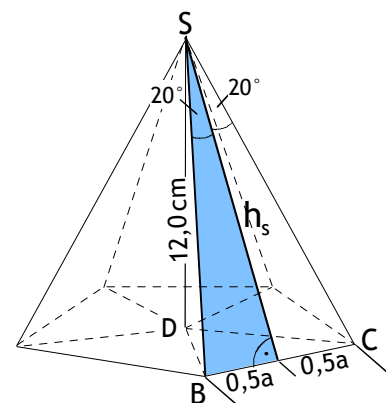
$$\text{ergibt: } A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 8,21 \text{ cm} \cdot 5,65 \text{ cm} = 23,2 \text{ cm}^2$$

Für die Grundfläche $G = 5 \cdot A_{BCD}$ folgt damit:

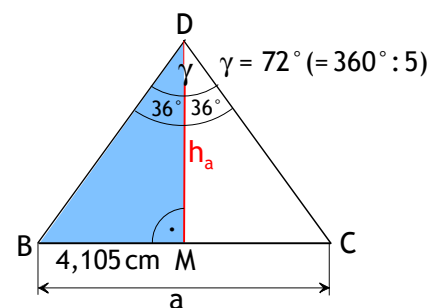
$$G = 5 \cdot 23,2 \text{ cm}^2 = 116,0 \text{ cm}^2$$



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A2



→ Berechnung der Pyramidenhöhe h:

Die Pyramidenhöhe h kann in dem markierten Dreieck der Figur 4 mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

Es gilt (siehe Figur 4): $h^2 + h_a^2 = h_s^2$

Mit $h_a = 5,65 \text{ cm}$ (siehe oben) folgt:

$$h^2 + (5,65 \text{ cm})^2 = h_s^2$$

Die Seitenhöhe h_s kann in dem markierten Dreieck der Figur 5 mit der Kosinusfunktion berechnet werden.

Es gilt (siehe Figur 5):

$$\cos 20^\circ = \frac{h_s}{12,0} \quad | \cdot 12,0$$

$$\Leftrightarrow 11,28 = h_s \text{ bzw. } \underline{h_s = 11,28 \text{ cm}}$$

Einsetzen von $h_s = 11,28 \text{ cm}$ in $h^2 + (5,65 \text{ cm})^2 = h_s^2$ ergibt:

$$h^2 + (5,65 \text{ cm})^2 = (11,28 \text{ cm})^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 + 31,92 \text{ cm}^2 = 127,24 \text{ cm}^2 \quad | -31,92 \text{ cm}^2$$

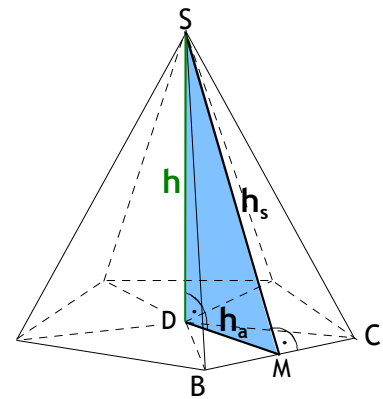
$$\Leftrightarrow h^2 = 95,32 \text{ cm}^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow h = 9,76 \text{ cm}$$

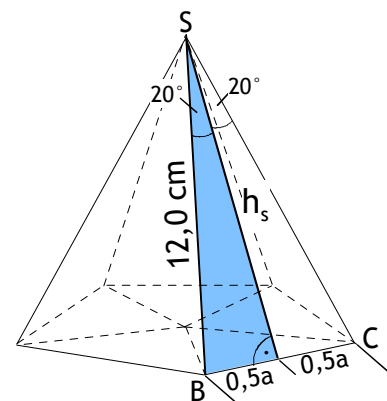
Mit $G = 116,0 \text{ cm}^2$ und $h = 9,76 \text{ cm}$ erhält man schließlich für das Pyramidenvolumen $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 116,0 \text{ cm}^2 \cdot 9,76 \text{ cm} = 377,4 \text{ cm}^3$$

Ergebnis: Die Pyramide hat das Volumen $V = 377,4 \text{ cm}^3$.



Figur 4



Figur 5

Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A2



Aufgabe 3:

Zuordnung der drei Graphen zu den Funktionsgleichungen:

- Das Schaubild zur **Funktionsgleichung (A)** muss symmetrisch zur y-Achse sein, weil die Funktionsgleichung (A) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ die Form $y = ax^2 + c$ hat. Dies trifft nur auf die **Parabel p_3** zu.
- Das Schaubild zur **Funktionsgleichung (B)** $y = (x - 3)^2 + e$ hat den Scheitelpunkt $S_2(3|e)$. Das einzige Schaubild, dessen Scheitelpunkt die x-Koordinate $x = 3$ hat, ist die **Parabel p_2** . Hinweis: Man kann die x-Koordinate des Scheitelpunkts an der Symmetrieachse von p_2 ablesen (siehe unten).
- Das Schaubild zur **Funktionsgleichung (C)** $y = x^2 + 4x + 5$ ist eine nach oben geöffnete verschobene Normalparabel. Die Koordinaten deren Scheitelpunkts kann man mit einer quadratischen Ergänzung der Gleichung $y = x^2 + 4x + 5$ bestimmen:

$$y = x^2 + 4x + 2^2 + 5 - 2^2$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 2)^2 + 5 - 4$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 2)^2 + 1$$

An dieser Scheitelform kann man die Koordinaten des Scheitelpunkts ablesen: $S_c(-2|1)$
Das ist der Scheitelpunkt der **Parabel p_1** (siehe Schaubild der Aufgabenstellung).

Ergebnis:

Die Funktionsgleichung (A) gehört zur **Parabel p_3** . Die Funktionsgleichung (B) gehört zur **Parabel p_2** .
Die Funktionsgleichung (C) gehört zur **Parabel p_1** .

Der Wert für e in $y = (x - 3)^2 + e$:

Den Wert für e kann man bestimmen, indem man die Koordinaten eines Punktes der Parabel p_2 in die Gleichung $y = (x - 3)^2 + e$ einsetzt. Zum Beispiel die Koordinaten von $A(5|0)$ (siehe Schaubild).
Einsetzen der Koordinaten von $A(5|0)$ in $y = (x - 3)^2 + e$ ergibt:

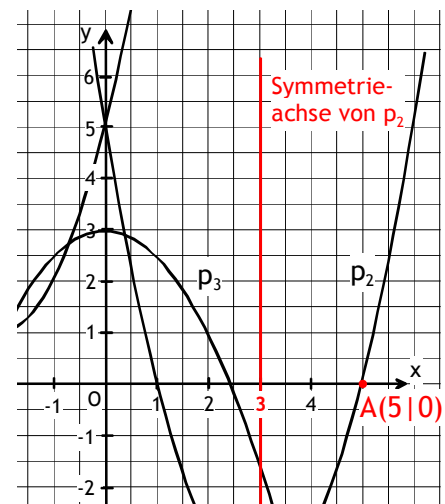
$$0 = (5 - 3)^2 + e$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2^2 + e$$

$$\Leftrightarrow 0 = 4 + e \quad | -4$$

$$\Leftrightarrow -4 = e \quad \text{bzw.} \quad e = -4$$

Ergebnis: Der Wert für e ist $e = -4$.



Die Funktionsgleichung der Geraden g:

Die Koordinaten des Scheitelpunkts S_2 von p_2 kann man direkt an der Scheitelform $y = (x - 3)^2 - 4$ ablesen: $S_2(3|-4)$

Weil die Gerade g durch $P(0|2)$ geht, schneidet sie die y-Achse bei $y = 2$. Das ist der y-Achsenabschnitt $c = 2$ in der Funktionsgleichung $y = mx + c$. Einsetzen der Koordinaten von $S_2(3|-4)$ in $y = m \cdot x + 2$ ergibt:

$$-4 = m \cdot 3 + 2 \quad | -2$$

$$\Leftrightarrow -6 = 3m \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow -2 = m \quad \text{bzw.} \quad m = -2$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Geraden g ist $y = -2x + 2$.

Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A2



Aufgabe 4:

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:

Beim Berechnen der Wahrscheinlichkeiten muss man beachten, dass das *gleichzeitige* Ziehen zweier Sammelbilder einem zweimaligen Ziehen von jeweils einem Sammelbild *ohne* Zurücklegen entspricht. Beim zweiten Zug sind daher nur noch 19 Sammelbilder in dem Karton.

- Wahrscheinlichkeit für zwei portugiesische Spieler:

Beim ersten Zug ist die Wahrscheinlichkeit, einen portugiesischen Spieler zu erwischen:

$$P_1(\text{portug. Sp.}) = \frac{5}{20}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dann auch beim zweiten Zug einen portugiesischen Spieler zu erwischen, ist:

$$P_2(\text{portug. Sp.}) = \frac{4}{19}$$

(Man beachte, dass beim zweiten Zug nur noch 19 Sammelbilder im Karton sind. Davon zeigen nur noch 4 Sammelbilder einen portugiesischen Spieler.)

Mit der Produktregel folgt: $P(\text{zwei portug. Sp.}) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{20}{380} \approx 5,3 \%$

- Wahrscheinlichkeit für höchstens einen deutschen Spieler:

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens einen deutschen Spieler zu erwischen, kann einfacher mit dem Gegenereignis „zwei deutsche Spieler“ berechnet werden.

Mit der Produktregel erhält man: $P(\text{zwei deutsche Sp.}) = \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{30}{380}$

Mit der Formel $P(\text{höchstens ein deutscher Sp.}) = 1 - P(\text{zwei deutsche Sp.})$ erhält man:

$$P(\text{höchstens ein deutscher Sp.}) = 1 - \frac{30}{380} = \frac{350}{380} \approx 92,1 \%$$

- Wahrscheinlichkeit, dass kein französischer Spieler gezogen wird:

Beim ersten Zug sind 11 Sammelbilder in dem Schuhkarton, auf denen kein französischer Spieler abgebildet ist (6 deutsche + 5 portugiesische Spieler). Somit ist $P_1(\text{kein französischer Sp.}) = \frac{11}{20}$.

Beim zweiten Zug sind dann nur noch 10 Sammelbilder in dem Schuhkarton, auf denen kein französischer Spieler abgebildet ist. Somit ist $P_2(\text{kein französischer Sp.}) = \frac{10}{19}$.

Mit der Produktregel erhält man: $P(\text{kein französischer Sp.}) = \frac{11}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{110}{380} \approx 28,9 \%$

Ergebnis:

$$P(\text{zwei portugiesische Sp.}) = \frac{20}{380} \approx 5,3 \%$$

$$P(\text{höchstens ein deutscher Sp.}) = \frac{350}{380} \approx 92,1 \%$$

$$P(\text{kein französischer Sp.}) = \frac{110}{380} \approx 28,9 \%$$

Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A2



Aufgabe 5:

Die Lösung der Gleichung:

1. Schritt: Auflösen der Klammern

Man beachte, dass man um die Quadratklammer zusätzliche Klammern setzen muss, weil vor der Quadratklammer ein Minuszeichen steht.

$$(x - 3)(1 + x) - [(x - 4)^2] = x(x - 3) - 1$$

$$\Leftrightarrow x + x^2 - 3 - 3x - [x^2 - 8x + 16] = x^2 - 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow x + x^2 - 3 - 3x - x^2 + 8x - 16 = x^2 - 3x - 1$$

2. Schritt: Vereinfachen beider Seiten und Umstellen aller Summanden

$$\Leftrightarrow x + x^2 - 3 - 3x - x^2 + 8x - 16 = x^2 - 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow 6x - 19 = x^2 - 3x - 1 \quad | -6x + 19$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 9x + 18$$

3. Schritt: Anwenden der Lösungsformel

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ und $b = -9$; $c = 18$ erhält man:

$$x_1 = 4,5 + \sqrt{4,5^2 - 18} = 4,5 + \sqrt{2,25} = 6 \quad \text{und} \quad x_2 = 4,5 - \sqrt{4,5^2 - 18} = 4,5 - \sqrt{2,25} = 3$$

Ergebnis: Die Lösungen der Gleichung sind $x_1 = 6$ und $x_2 = 3$.

Aufgabe 6:

Der prozentuale Anstieg der Nutzerzahlen von 2020 zu 2022:

Im Jahr 2020 waren es 340 000 Nutzer. Das ist der Grundwert $G = 340\,000$ Nutzer.

Im Jahr 2022 gab es 420 000 Nutzer. Das ist der erhöhte Grundwert $G_+ = 420\,000$ Nutzer.

Einsetzen der Werte $G = 340\,000$ und $G_+ = 420\,000$ in die Formel $G_+ = G \cdot q_+$ ergibt:

$$420\,000 = 340\,000 \cdot q_+ \quad | : 340\,000$$

$$\Leftrightarrow 1,235 = q_+ \quad \text{bzw.} \quad q_+ = 1,235$$

Mit $q_+ = 1 + \frac{p}{100}$ folgt: $p \% = 23,5 \%$

Ergebnis: Die Anzahl der Nutzer ist zwischen 2020 und 2022 um 23,5 % gestiegen.

Die Anzahl der Nutzer in 2023 und die zugehörige Säule:

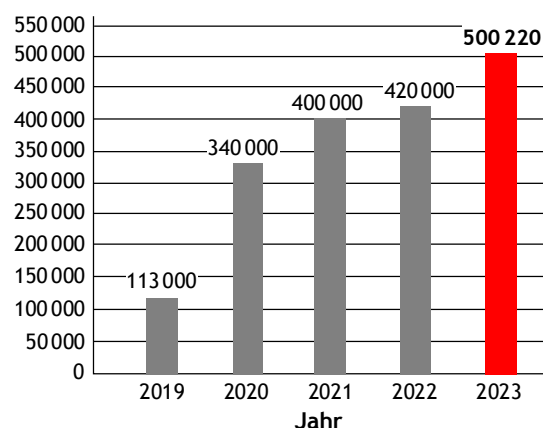
Die Anzahl der Nutzer im Jahr 2022 ist der Grundwert $G = 420\,000$ Nutzer. Bei einer prozentualen Erhöhung um

$p \% = 19,1 \%$ erhält man für den Wachstumsfaktor $q_+ = 1 + \frac{p}{100}$:

$$q_+ = 1 + \frac{19,1}{100} = 1,191$$

Einsetzen von $G = 420\,000$ und $q_+ = 1,191$ in die Formel $G_+ = G \cdot q_+$ ergibt:

$$G_+ = 420\,000 \cdot 1,191 = 500\,220 \text{ Nutzer}$$



Lösungen zur Prüfung 2024: Pflichtteil A2



Der prozentuale Anteil der Mädchen an den 10- bis 19-jährigen Nutzern im Jahr 2022:

Zunächst muss man berechnen, wie viele 10- bis 19-jährige Nutzer es im Jahr 2022 gibt:

Insgesamt gibt es im Jahr 2022 dem Säulendiagramm zufolge 420 000 Nutzer. Das ist der Grundwert **G = 420 000 Nutzer**. Davon sind dem Kreisdiagramm zufolge 25 % in der Altersklasse 10 bis 19 Jahre. Der Prozentsatz ist also **p % = 25 %**. Gesucht ist der Prozentwert W.

Damit erhält man:

$$W = 25 \% \text{ von } 420\,000 \text{ Nutzern} = \frac{25}{100} \cdot 420\,000 \text{ Nutzer} = \underline{105\,000 \text{ Nutzer}} \text{ (in der Altersklasse 10 bis 19 Jahre)}$$

Diesen Wert muss man nun als neuen Grundwert **G₂ = 105 000 Nutzer** betrachten.

Der Prozentwert W₂ ist nun **W₂ = 47 500 Mädchen**. Damit erhält man:

$$47\,500 \text{ Mädchen von } 105\,000 \text{ Nutzern entsprechen dem Prozentsatz } p \% = \frac{47\,500}{105\,000} \cdot 100 \% = \underline{45,2 \%}.$$

Ergebnis: Im Jahr 2022 ist der Anteil der Mädchen an den 10- bis 19-jährigen Nutzern **p % = 45,2 %**.

Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1a:

Lösungsübersicht:

Zur Lösung dieser Aufgabe muss man beachten, dass das Drachenviereck $EGCF$ symmetrisch zu seiner Achse $\overline{EC}$ ist (siehe Figur 1). Somit gilt $\delta = \angle EFC = \angle CGE$.

- Für den **Winkel φ** gilt: $\varphi + \delta = 180^\circ$ (siehe Figur 1). Der Winkel δ kann mit $\delta + \gamma = 180^\circ$ berechnet werden, wenn man den Winkel γ kennt. Der Winkel γ kann mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck EBG berechnet werden (siehe Figur 1).

- Für den **Umfang des Vierecks $AEFD$** gilt: $u_{AEFD} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{DF} + \overline{AD}$

- Die Strecke $\overline{AE}$ kann sofort mit $\overline{AB} = 9,4 \text{ cm}$ und $\overline{BE} = 5,6 \text{ cm}$ berechnet werden (siehe Figur 2).

- Für die Strecke $\overline{EF}$ gilt wegen der Symmetrie des Drachenvierecks: $\overline{EF} = \overline{EG}$ (siehe Figur 1). Die Strecke $\overline{EG}$ wiederum kann mit der Kosinusfunktion im Dreieck EBG berechnet werden (siehe Figur 3).

- Zur Berechnung der Strecke $\overline{DF}$ muss man die Hilfslinie $\overline{EH}$ einzeichnen (siehe Figur 4).

Dann gilt: $\overline{DF} = \overline{FH} + \overline{DH}$, mit $\overline{DH} = \overline{AE}$. Die Strecke $\overline{FH}$ kann mit der Kosinusfunktion im Dreieck EFH berechnet werden (siehe Figur 4).

- Die Strecke $\overline{AD}$ ist: $\overline{AD} = \overline{EH}$ (siehe Figur 4). Die Strecke $\overline{EH}$ kann mit der Sinusfunktion im Dreieck EFH berechnet werden (siehe Figur 4).

Berechnung des Winkels φ :

Es gilt (siehe Figur 1): $\varphi + \delta = 180^\circ$

Für den Winkel δ gilt: $\delta + \gamma = 180^\circ$

Der Winkel γ kann mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck EBG berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 1):

$$20^\circ + 90^\circ + \gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + \gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \gamma = 70^\circ$$

Einsetzen von $\gamma = 70^\circ$ in $\delta + \gamma = 180^\circ$ ergibt:

$$\delta + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \delta = 110^\circ$$

Einsetzen von $\delta = 110^\circ$ in $\varphi + \delta = 180^\circ$ ergibt:

$$\varphi + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \varphi = 70^\circ$$

Ergebnis: Der Winkel φ beträgt $\varphi = 70^\circ$.

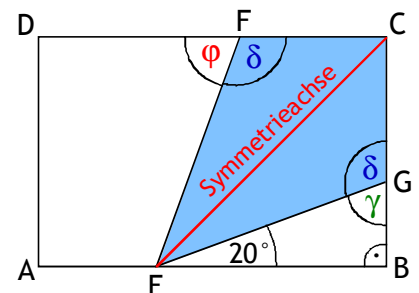
Berechnung des Umfangs des Vierecks $AEFD$:

Es gilt: $u_{AEFD} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{DF} + \overline{AD}$

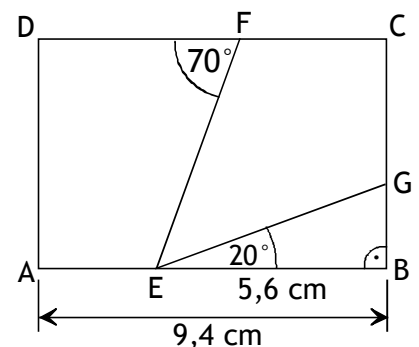
→ Berechnung der Strecke $\overline{AE}$:

Für die Strecke $\overline{AE}$ gilt (siehe Figur 2):

$$\overline{AE} = 9,4 \text{ cm} - 5,6 \text{ cm} = \underline{\underline{3,8 \text{ cm}}}$$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W1



→ Berechnung der Strecke EF:

Wegen der Symmetrie des Drachenvierecks EGCF gilt: $\overline{EF} = \overline{EG}$

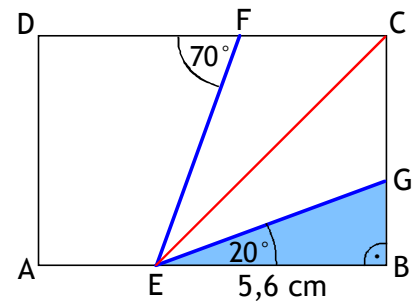
Die Strecke $\overline{EG}$ kann im Dreieck EBG mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Es gilt:

$$\cos 20^\circ = \frac{5,6}{\overline{EG}} \quad | \cdot \overline{EG}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EG} \cdot \cos 20^\circ = 5,6 \quad | : \cos 20^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{EG} = 5,96 \text{ cm}$$

Damit ist auch $\overline{EF} = \underline{5,96 \text{ cm}}$.



Figur 3

→ Berechnung der Strecke DF:

Zur Berechnung der Strecke $\overline{DF}$ muss man die Hilfslinie $\overline{EH}$ einzeichnen (siehe Figur 4). Dann gilt:

$\overline{DF} = \overline{FH} + \overline{DH}$, mit $\overline{DH} = \overline{AE} = 3,8 \text{ cm}$ (siehe oben)

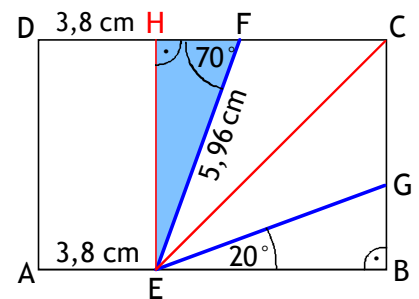
Die Strecke $\overline{FH}$ kann mit der Kosinusfunktion im Dreieck EFH berechnet werden (siehe Figur 4). Darin gilt:

$$\cos 70^\circ = \frac{\overline{FH}}{5,96} \quad | \cdot 5,96$$

$$\Leftrightarrow 2,04 = \overline{FH} \quad \text{bzw.} \quad \overline{FH} = 2,04 \text{ cm}$$

Mit $\overline{FH} = 2,04 \text{ cm}$ und $\overline{DH} = 3,8 \text{ cm}$ folgt für $\overline{DF} = \overline{FH} + \overline{DH}$:

$$\overline{DF} = 2,04 \text{ cm} + 3,8 \text{ cm} = \underline{5,84 \text{ cm}}$$



Figur 4

→ Berechnung der Strecke AD:

Es gilt: $\overline{AD} = \overline{EH}$ (siehe Figur 4). Die Strecke $\overline{EH}$ kann mit der Sinusfunktion im Dreieck EFH berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 4):

$$\sin 70^\circ = \frac{\overline{EH}}{5,96} \quad | \cdot 5,96$$

$$\Leftrightarrow 5,60 = \overline{EH} \quad \text{bzw.} \quad \overline{EH} = 5,60 \text{ cm}$$

Damit ist auch $\overline{AD} = \underline{5,60 \text{ cm}}$.

Einsetzen von $\overline{AE} = 3,8 \text{ cm}$, $\overline{EF} = 5,96 \text{ cm}$, $\overline{DF} = 5,84 \text{ cm}$ und $\overline{AD} = 5,60 \text{ cm}$ in die Umfangsformel

$u_{AEFD} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{DF} + \overline{AD}$ ergibt:

$$u_{AEFD} = 3,8 \text{ cm} + 5,96 \text{ cm} + 5,84 \text{ cm} + 5,60 \text{ cm} = \underline{21,20 \text{ cm}}$$

Ergebnis: Der Umfang des Vierecks AEFD ist $\underline{u_{AEFD} = 21,2 \text{ cm}}$.

Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W1



Alternative Berechnung der Strecken $\overline{FD}$ und $\overline{AD}$:

- Für die Strecke $\overline{FD}$ gilt: $\overline{FD} = 9,4 \text{ cm} - \overline{FC}$

Die Strecke $\overline{FC}$ kann im gleichschenkligen Dreieck GCF mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{FG}$ kennt. Die Strecke $\overline{FG} = 2 \overline{GM}$ kann mit der Strecke $\overline{GM}$ bestimmt werden, die wiederum im Dreieck EGM mit der Kosinusfunktion berechnet werden kann.

Hinweis: Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck GCF sind 45° , weil das Dreieck GCF gleichschenkelig und rechtwinklig ist und die Summe der Innenwinkel 180° beträgt. Der Winkel 65° ergibt sich aus $110^\circ - 45^\circ$ (s. Figur 1; 5).

- Für die Strecke $\overline{AD}$ gilt: $\overline{AD} = \overline{BG} + \overline{CG}$

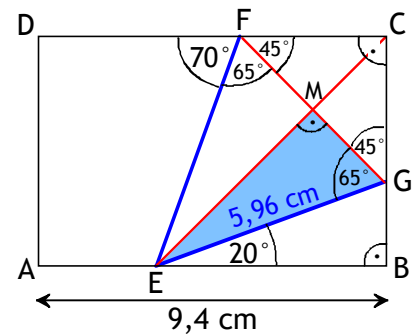
Die Strecke $\overline{BG}$ kann im Dreieck EBG mit der Tangensfunktion berechnet werden. Für die Strecke $\overline{CG}$ gilt: $\overline{CG} = \overline{FC}$

Mit diesem Rechenweg erhält man:

- $\overline{GM} = 2,52 \text{ cm}$; $\overline{FG} = 5,04 \text{ cm}$; $\overline{FC} = 3,56 \text{ cm}$; $\overline{FD} = \underline{5,84 \text{ cm}}$
- $\overline{BG} = 2,04 \text{ cm}$; $\overline{CG} = 3,56 \text{ cm}$; $\overline{AD} = \underline{5,60 \text{ cm}}$

Hinweis:

Die alternative Berechnung der Strecken $\overline{FD}$ und $\overline{AD}$ ist allerdings wesentlich umständlicher als der oben beschriebene Lösungsweg (siehe Seiten 15 und 16).



Figur 5



Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W1

Aufgabe W1b:

Lösungsübersicht:

- Die **Funktionsgleichung der Parabel p_1** erhält man, indem man die Koordinaten des Scheitelpunkts $S_1(1|1)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ einsetzt (für $d = 1$ und $e = 1$).
Die **Funktionsgleichung der Parabel p_2** kann man sofort mit Hilfe des Nullstellenansatzes $y = (x - x_1)(x - x_2)$ und den Nullstellen $x_1 = -6$ und $x_2 = -2$ aufstellen.
- Die **Gleichung der Geraden g** kann man bestimmen, indem man die Koordinaten von $S_1(1|1)$ und $A(2|-1)$ jeweils in die allgemeine Form $g: y = m \cdot x + c$ einsetzt. Die Lösung des resultierenden Gleichungssystems sind die Werte von m und c .
- Die **Koordinaten des Scheitelpunkts S_2** erhält man, indem man die Funktionsgleichung von p_2 mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung in eine Scheitelform umwandelt. Die **Entfernung zwischen S_1 und S_2** kann man dann mit der Abstandsformel zwischen zwei Punkten berechnen (siehe Figur 1).
- **Milos Behauptung** kann man überprüfen, indem man zunächst den Schnittpunkt der Parabeln p_1 und p_2 berechnet. Anschließend macht man mit den Koordinaten dieses Schnittpunkts eine Punktprobe auf der Geraden g . Wenn der Schnittpunkt zwischen p_1 und p_2 auf der Geraden g liegt, ist Milos Behauptung richtig.

Die Funktionsgleichungen der Parabeln p_1 und p_2 :

- Die Funktionsgleichung der Parabel p_1 erhält man, indem man die Koordinaten des Scheitelpunkts $S_1(1|1)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ einsetzt:
 $p_1: y = (x - 1)^2 + 1$
- Die Funktionsgleichung der Parabel p_2 erhält man mit Hilfe des Nullstellenansatzes $y = (x - x_1)(x - x_2)$. Einsetzen der Nullstellen $x_1 = -6$ und $x_2 = -2$ ergibt:
 $p_2: y = (x - (-6))(x - (-2)) = (x + 6) \cdot (x + 2)$.

Ergebnis: Die Funktionsgleichungen sind $p_1: y = (x - 1)^2 + 1$ und $p_2: y = (x + 6) \cdot (x + 2)$

Hinweise:

1.) Man kann die Funktionsgleichungen so stehen lassen, weil die Normalform hier nicht verlangt ist. Die Normalformen erhält man durch Ausmultiplizieren der Klammern:

$$p_1: y = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 2$$

$$p_2: y = (x + 6) \cdot (x + 2) = x^2 + 2x + 6x + 12 = x^2 + 8x + 12$$

2.) Man kann die Koordinaten der Punkte $N_1(-6|0)$ und $N_2(-2|0)$ auch jeweils in die Normalform $y = x^2 + bx + c$ einsetzen. Man erhält dann das Gleichungssystem

$$(I) \quad 0 = 36 - 6b + c$$

$$(II) \quad 0 = 4 - 2b + c$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems sind die Werte $b = +8$ und $c = +12$.

Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W1



Die Funktionsgleichung der Geraden g:

Einsetzen der Koordinaten von $S_1(1|1)$ und $A(2|-1)$ in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ ergibt das folgende Gleichungssystem:

Mit $S_1(1|1)$: $1 = m \cdot 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1m + c \quad (I)$

Mit $A(2|-1)$: $-1 = m \cdot 2 + c \Leftrightarrow -1 = 2m + c \quad (II)$

$$(I) - (II): 2 = -1m \Leftrightarrow m = -2$$

Einsetzen von $m = -2$ in die Gleichung $(I) 1 = 1m + c$ ergibt:

$$1 = 1 \cdot (-2) + c \Leftrightarrow 1 = -2 + c \Leftrightarrow c = 3$$

Ergebnis: Die Gerade g hat die Funktionsgleichung $y = -2x + 3$.

Alternative Berechnung:

Man kann auch zuerst mit den Punkten $S_1(1|1)$ und $A(2|-1)$ und der Formel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ die Steigung der Geraden g bestimmen. Man erhält mit $y_2 = -1$, $y_1 = 1$ und $x_2 = 2$ und $x_1 = 1$:

$$m = \frac{-1 - 1}{2 - 1} = \frac{-2}{1} = -2$$

Einsetzen der Koordinaten von $S_1(1|1)$ in die unvollständige Gleichung $y = -2x + c$ ergibt:

$$1 = -2 \cdot 1 + c \Leftrightarrow 1 = -2 + c \Leftrightarrow c = 3$$

(Hinweis: Man hätte auch die Koordinaten von $A(2|-1)$ in die Gleichung $y = -2x + c$ einsetzen können.)

Die Entfernung zwischen den Punkten S_1 und S_2 :

Zunächst muss man die Koordinaten des Scheitelpunkts S_2 bestimmen. Dazu muss man die Gleichung $p_2: y = x^2 + 8x + 12$ mit einer quadratischen Ergänzung in die Scheitelform umwandeln:

$$y = x^2 + 8x + 4^2 + 12 - 4^2$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 4)^2 + 12 - 16$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 4)^2 - 4$$

Der Scheitelpunkt der Parabel p_2 hat somit die Koordinaten $S_2(-4|-4)$.

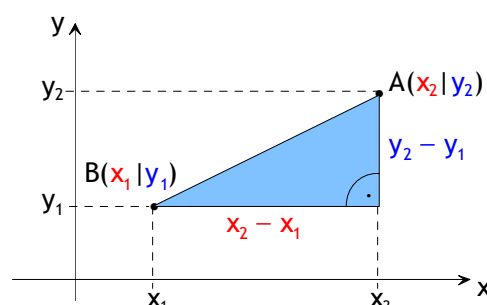
Die Entfernung d zwischen $S_1(1|1)$ und $S_2(-4|-4)$ kann man mit der Formel $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ berechnen. Mit $x_2 = -4$, $x_1 = 1$ und $y_2 = -4$, $y_1 = 1$ erhält man:

$$d = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} \approx 7,1 \text{ LE}$$

Ergebnis: Die Entfernung zwischen den Punkten $S_1(1|1)$ und $S_2(-4|-4)$ ist $d = \sqrt{50} \approx 7,1 \text{ LE}$.

Hinweis:

Die obige, allgemeine Abstandsformel ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras (siehe Abbildung rechts).



Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W1



Überprüfen von Milos Behauptung:

Zunächst berechnet man den Schnittpunkt der Parabeln p_1 und p_2 . Gleichsetzen der Funktionsgleichungen $p_1: y = x^2 - 2x + 2$ und $p_2: y = x^2 + 8x + 12$ ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= x^2 + 8x + 12 & | -x^2 \\ \Leftrightarrow -2x + 2 &= 8x + 12 & | -8x - 2 \\ \Leftrightarrow -10x &= 10 & | : (-10) \\ \Leftrightarrow x &= -1 \end{aligned}$$

Das ist die x-Koordinate des Schnittpunkts. Die y-Koordinate erhält man, indem man $x = -1$ in eine der beiden Parabelgleichungen einsetzt. Einsetzen von $x = -1$ in $y = x^2 - 2x + 2$ ergibt:

$$y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2 = 1 + 2 + 2 = 5$$

Die Parabeln p_1 und p_2 schneiden sich also in dem Punkt $Q(-1 | 5)$.

Wenn der Punkt $Q(-1 | 5)$ auch auf der Geraden g liegt, ist Q der gemeinsame Punkt von p_1 , p_2 und g . Für die Punktprobe muss man die Koordinaten von $Q(-1 | 5)$ in $g: y = -2x + 3$ einsetzen. Man erhält:

$$\begin{aligned} 5 &= -2 \cdot (-1) + 3 \\ \Leftrightarrow 5 &= 2 + 3 \\ \Leftrightarrow 5 &= 5 \end{aligned}$$

Das ist eine wahre Aussage, somit liegt der Schnittpunkt $Q(-1 | 5)$ der Parabeln auch auf der Geraden g .

Ergebnis:

Milos **Behauptung stimmt**, weil der Schnittpunkt $Q(-1 | 5)$ zwischen p_1 und p_2 auf der Geraden g liegt.

Alternative Lösung: (etwas aufwändiger)

Anstatt der Punktprobe kann man auch die Schnittpunkte zwischen der Geraden g und den Parabeln p_1 und p_2 berechnen. Durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen erhält man:

Schnittpunkte zwischen g und p_1 : $Q(-1 | 5)$ und $T(1 | 1)$

Schnittpunkte zwischen g und p_2 : $Q(-1 | 5)$ und $R(-9 | 21)$

Weil die Gerade g beide Parabeln in dem gleichen Punkt schneidet, gibt es zwischen p_1 , p_2 und g einen gemeinsamen Punkt; nämlich $Q(-1 | 5)$.

Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W2



Aufgabe W2a:

Lösungsübersicht:

- Den **Schnittpunkt A** der Geraden g mit der x -Achse berechnet man, indem man in der Funktionsgleichung $y = -x - 3$ für $y = 0$ setzt und die resultierende Gleichung nach x auflöst. Die y -Koordinate des **Schnittpunkts B** mit der y -Achse ist der y -Achsenabschnitt von g , den man direkt an der Funktionsgleichung ablesen kann.
- Die **Funktionsgleichung der Parabel p** kann man bestimmen, indem man die Koordinaten der Punkte A und B jeweils in die allgemeine Normalform $y = x^2 + bx + c$ einsetzt. Die Lösung des resultierenden Gleichungssystems sind die Werte für b und c .
- Zur Berechnung des **Flächeninhalts des Dreiecks PSQ** benötigt man zunächst die x -Koordinaten der Punkte $P(x_P | 12)$ und $Q(x_Q | 12)$. Diese x -Koordinaten erhält man, indem man die y -Koordinate $y_{P,Q} = 12$ in die Funktionsgleichung von p einsetzt und die resultierende quadratische Gleichung nach x auflöst. Wie man dann den Flächeninhalt des Dreiecks PSQ berechnet, erkennt man am besten anhand einer Skizze (siehe Figur 1).

Berechnung der Koordinaten von A und B:

→ Schnittpunkt A von g : $y = -x - 3$ mit der x -Achse:

Einsetzen von $y = 0$ in $y = -x - 3$ ergibt:

$$0 = -x - 3 \quad | +x$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Somit ist der Schnittpunkt A von g mit der x -Achse: **A(-3 | 0)**

→ Schnittpunkt B von g : $y = -x - 3$ mit der y -Achse:

Einsetzen von $x = 0$ in $y = -x - 3$ ergibt: $y = -0 - 3 = -3$

Somit ist der Schnittpunkt B von g mit der y -Achse: **B(0 | -3)**

Ergebnis:

Die Schnittpunkte von g mit den Koordinatenachsen haben die Koordinaten: **A(-3 | 0)** und **B(0 | -3)**

Die Funktionsgleichung der Parabel p und die Koordinaten ihres Scheitelpunkts S:

→ Die Funktionsgleichung der Parabel p :

Einsetzen der Koordinaten von A(-3 | 0) und B(0 | -3) in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$\text{Mit A(-3 | 0): } 0 = (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \Leftrightarrow 0 = 9 - 3b + c \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit B(0 | -3): } -3 = 0^2 + b \cdot 0 + c \Leftrightarrow -3 = c \quad (\text{II})$$

Einsetzen von $c = -3$ in die Gleichung (I) $0 = 9 - 3b + c$ ergibt:

$$0 = 9 - 3b + (-3)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 9 - 3b - 3$$

$$\Leftrightarrow 0 = 6 - 3b \quad | +3b$$

$$\Leftrightarrow 3b = 6 \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow b = 2$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung von p ist **$y = x^2 + 2x - 3$** .

Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W2



→ Die Koordinaten des Scheitelpunkts von p:

Die Koordinaten des Scheitelpunkts S erhält man, indem die Gleichung von p: $y = x^2 + 2x - 3$ mit einer quadratischen Ergänzung in eine Scheitelform umwandelt:

$$y = x^2 + 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 2x + 1^2 - 3 - 1^2 \quad | \text{Anwenden der ersten binomischen Formel}$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 1)^2 - 3 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 1)^2 - 4$$

Dieser Scheitelform entnimmt man: **S(-1 | -4)**

Tipp: Die x-Koordinate des Scheitelpunkts ist derjenige Wert x, für den die Quadratklammer $(x + 1)^2$ in der Scheitelform 0 wird. Die y-Koordinate des Scheitelpunkts steht immer direkt hinter der Quadratklammer.

Ergebnis: Der Scheitelpunkt S der Parabel p hat die Koordinaten **S(-1 | -4)**.

Der Flächeninhalt des Dreiecks PSQ:

Zunächst muss man die x-Koordinaten der Punkte $P(x_P | 12)$ und $Q(x_Q | 12)$ berechnen. Dazu setzt man die y-Koordinate **y = 12** in die Parabelgleichung $y = x^2 + 2x - 3$ ein und löst die resultierende Gleichung nach x auf. Man erhält:

$$12 = x^2 + 2x - 3 \quad | -12$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 + 2x - 15$$

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ und $b = 2$; $c = -15$ erhält man:

$$x_1 = -1 + \sqrt{1^2 - (-15)} = -1 + \sqrt{16} = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = -1 - \sqrt{16} = -5$$

Damit ist **P(-5 | 12)** und **Q(3 | 12)**. (Hinweis: Die Bezeichnung der Punkte kann auch vertauscht werden.)

Zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks PSQ sollte man zunächst eine Skizze anfertigen (siehe Figur 1).

Für den Flächeninhalt des Dreiecks PSQ gilt: $A_{PSQ} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

- Die **Strecke g** = $\overline{PQ}$ ist die Differenz der x-Koordinaten von $Q(3 | 12)$ und $P(-5 | 12)$, weil beide Punkte die gleiche y-Koordinate $y = 12$ haben. Man erhält (siehe Figur 1):

$$g = 3 - (-5) = 3 + 5 = 8 \text{ LE}$$

- Die **Höhe h** ist die Differenz der y-Koordinaten von $Q(3 | 12)$ und $S(-1 | -4)$. Man erhält (siehe Figur 1):

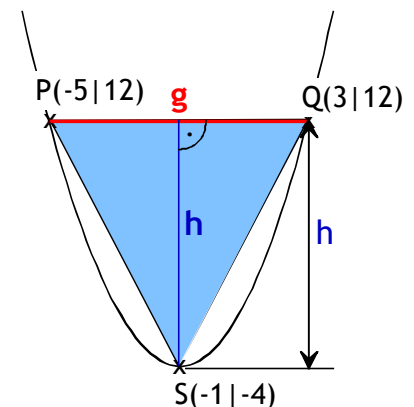
$$h = 12 - (-4) = 12 + 4 = 16 \text{ LE}$$

Einsetzen von **g = 8** und **h = 16** in $A_{PSQ} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ ergibt:

$$A_{PSQ} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = 64 \text{ FE}$$

Ergebnis: Das Dreieck PSQ hat den Flächeninhalt **$A_{PSQ} = 64 \text{ FE}$** .

(Hinweis: FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W2



Aufgabe W2b:

Lösungsübersicht:

- Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers setzt sich aus einem Kegelmantel und der

Oberfläche einer halben Kugel zusammen. Es gilt: $O_{\text{zus}} = M_{\text{Kegel}} + O_{\text{HK}} = \pi \cdot r \cdot s + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Die Länge der Seitenlinie s ist bereits angegeben mit $s = 14,4 \text{ cm}$. Der Radius r kann mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).

- Für die Oberfläche der Pyramide gilt: $O_{\text{Pyr}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s + a^2 = 2 \cdot a \cdot h_s + a^2$

Die Grundkante a ist $a = d = 2r$. Die Seitenhöhe h_s kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Pyramidenhöhe h_{Pyr} kennt (siehe Figur 2). Für die Pyramidenhöhe h_{Pyr} gilt laut Aufgabenstellung: $h_{\text{Pyr}} = h_{\text{ges}}$. Die Höhe h_{ges} des zusammengesetzten Körpers ist $h_{\text{ges}} = h_{\text{Kegel}} + r$. Die Kegelhöhe h_{Kegel} kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 3).

Die Differenz der Oberflächen beider Körper:

→ Berechnung der Oberfläche des zusammengesetzten Körpers:

Für die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers gilt:

$$O_{\text{zus}} = M_{\text{Kegel}} + O_{\text{HK}} = \pi \cdot r \cdot s + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

Mit der Länge $s = 14,4 \text{ cm}$ folgt:

$$O_{\text{zus}} = M_{\text{Kegel}} + O_{\text{HK}} = \pi \cdot r \cdot 14,4 + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

Der Radius r kann mit der Sinusfunktion in dem markierten Dreieck der Figur 1 berechnet werden.

(Man beachte, dass die Kegelhöhe h_{Kegel} den Winkel $\delta = 42^\circ$ halbiert.)

Es gilt (siehe Figur 1):

$$\sin 21^\circ = \frac{r}{14,4} \quad | \cdot 14,4$$

$$\Leftrightarrow 5,16 = r \text{ bzw. } r = 5,16 \text{ cm}$$

Einsetzen von $r = 5,16 \text{ cm}$ in $O_{\text{zus}} = \pi \cdot r \cdot 14,4 + 2 \cdot \pi \cdot r^2$ ergibt:

$$O_{\text{zus}} = \pi \cdot 5,16 \text{ cm} \cdot 14,4 \text{ cm} + 2 \cdot \pi \cdot (5,16 \text{ cm})^2 = 233,4 \text{ cm}^2 + 167,3 \text{ cm}^2 = 400,7 \text{ cm}^2$$

→ Berechnung der Oberfläche der Pyramide:

Für die Oberfläche der Pyramide gilt: $O_{\text{Pyr}} = 2 \cdot a \cdot h_s + a^2$

Für die Grundkante a gilt laut Aufgabenstellung $a = d = 2r$.

Mit $r = 5,16 \text{ cm}$ (siehe oben) folgt: $a = 10,32 \text{ cm}$

Die Seitenhöhe h_s kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt:

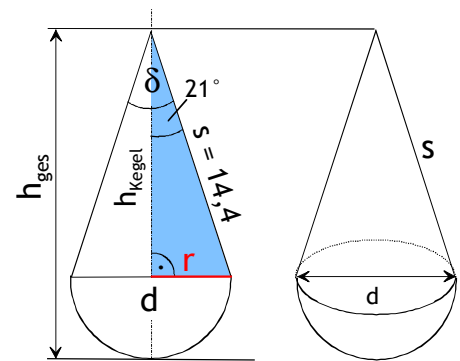
$$h_s^2 = (0,5a)^2 + h_{\text{Pyr}}^2$$

Mit $a = 10,32 \text{ cm}$ folgt:

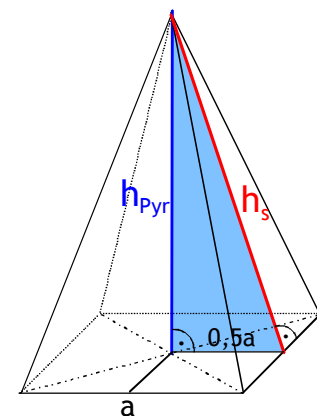
$$h_s^2 = (5,16 \text{ cm})^2 + h_{\text{Pyr}}^2$$

Für die Pyramidenhöhe h_{Pyr} gilt laut Aufgabenstellung:

$$h_{\text{Pyr}} = h_{\text{ges}}$$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W2



Für die Höhe h_{ges} des zusammengesetzten Körpers gilt (siehe Figur 3):

$$h_{\text{ges}} = h_{\text{Kegel}} + r$$

Der Radius r wurde bereits oben berechnet zu $r = 5,16 \text{ cm}$.

Die Kegelhöhe h_{Kegel} kann mit der Kosinusfunktion oder dem Satz des Pythagoras in dem markierten Dreieck der Figur 3 berechnet werden.

$$\text{Darin gilt: } h_{\text{Kegel}}^2 + r^2 = (14,4 \text{ cm})^2$$

Mit $r = 5,16 \text{ cm}$ folgt:

$$h_{\text{Kegel}}^2 + (5,16 \text{ cm})^2 = (14,4 \text{ cm})^2$$

$$\Leftrightarrow h_{\text{Kegel}}^2 + 26,63 \text{ cm}^2 = 207,36 \text{ cm}^2 \quad | -26,63 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow h_{\text{Kegel}}^2 = 180,73 \text{ cm}^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow h_{\text{Kegel}} = 13,44 \text{ cm}$$

Einsetzen von $h_{\text{Kegel}} = 13,44 \text{ cm}$ und $r = 5,16 \text{ cm}$ in $h_{\text{ges}} = h_{\text{Kegel}} + r$ ergibt:

$$h_{\text{ges}} = 18,6 \text{ cm} \text{ und damit auch } h_{\text{Pyr}} = 18,6 \text{ cm.}$$

Einsetzen von $h_{\text{Pyr}} = 18,6 \text{ cm}$ in $h_s^2 = (5,16 \text{ cm})^2 + h_{\text{Pyr}}^2$ ergibt:

$$h_s^2 = (5,16 \text{ cm})^2 + (18,6 \text{ cm})^2$$

$$\Leftrightarrow h_s^2 = 26,63 \text{ cm}^2 + 345,96 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow h_s^2 = 372,59 \text{ cm}^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow h_s = 19,30 \text{ cm}$$

Mit $a = 10,32 \text{ cm}$ und $h_s = 19,30 \text{ cm}$ erhält man schließlich für die Oberfläche $O_{\text{Pyr}} = 2 \cdot a \cdot h_s + a^2$ der Pyramide:

$$O_{\text{Pyr}} = 2 \cdot 10,32 \text{ cm} \cdot 19,30 \text{ cm} + (10,32 \text{ cm})^2$$

$$O_{\text{Pyr}} = 398,35 \text{ cm}^2 + 106,50 \text{ cm}^2$$

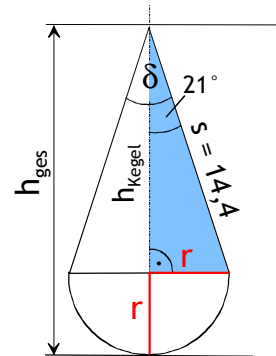
$$O_{\text{Pyr}} = 504,85 \text{ cm}^2$$

Ergebnis:

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers ist $O_{\text{zus}} = 400,7 \text{ cm}^2$.

Die Oberfläche der Pyramide ist $O_{\text{Pyr}} = 504,85 \text{ cm}^2$.

Die Differenz beider Oberflächen ist somit: $\Delta O = 504,85 \text{ cm}^2 - 400,7 \text{ cm}^2 = \underline{104,15 \text{ cm}^2}$.



Figur 3

Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W3



Aufgabe W3a:

Lösungsübersicht:

- Die **Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „zweimal Muschel“** kann mit der Produktregel berechnet werden. Man beachte dabei, dass nach dem ersten Zug nur noch *eine* Muschel in dem Gefäß ist.
- Zur Berechnung des **Erwartungswerts** benötigt man dann noch die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „zweimal Seestern“ und „Muschel und Seestern“. Das Ereignis „Muschel und Seestern“ setzt sich aus den Ergebnissen (Seestern; Muschel) und (Muschel; Seestern) zusammen, so dass man hier außer der Produktregel auch noch die Summenregel anwenden muss.
- Den **neuen Gewinn** für das Ereignis „zweimal Muschel“ muss man so wählen, dass der Erwartungswert = 0 € ergibt. Nur dann ist das Spiel wie gefordert auch fair.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „zweimal Muschel“:

Insgesamt sind beim ersten Zug 10 Gegenstände in dem Gefäß. Beim zweiten Zug sind es dann nur noch 9 Gegenstände, weil ohne Zurücklegen gezogen wird.

Beim ersten Zug ist die Wahrscheinlichkeit, eine Muschel zu ziehen: $P_1(M) = \frac{2}{10}$

Beim zweiten Zug ist die Wahrscheinlichkeit, eine Muschel zu ziehen: $P_2(M) = \frac{1}{9}$

Mit der Produktregel erhält man: $P(\text{zweimal Muschel}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90} \approx 2,2 \%$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, zwei Muscheln zu ziehen, beträgt $P(\text{zweimal Muschel}) = \frac{2}{90} = 2,2 \%$.

Berechnung des Erwartungswerts (aus Sicht eines Spielers):

Für den Erwartungswert E aus Sicht eines Spielers gilt:

$$E = P(\text{zweimal Muschel}) \cdot 9,00 \text{ €} + P(\text{zweimal Seestern}) \cdot 4,00 \text{ €} + P(\text{Muschel und Seestern}) \cdot 2,50 \text{ €} - 1,00 \text{ €}$$

Mit $P(\text{zweimal Muschel}) = \frac{2}{90}$ (siehe oben) folgt:

$$E = \frac{2}{90} \cdot 9,00 \text{ €} + P(\text{zweimal Seestern}) \cdot 4,00 \text{ €} + P(\text{Muschel und Seestern}) \cdot 2,50 \text{ €} - 1,00 \text{ €}$$

Man benötigt also noch die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „zweimal Seestern“ und „Muschel und Seestern“.

→ Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „zweimal Seestern“:

Beim ersten Zug ist die Wahrscheinlichkeit, einen Seestern zu ziehen: $P_1(\text{Seestern}) = \frac{3}{10}$

Beim zweiten Zug ist die Wahrscheinlichkeit, einen Seestern zu ziehen: $P_2(\text{Seestern}) = \frac{2}{9}$

Mit der Produktregel erhält man: $P(\text{zweimal Seestern}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$



Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W3

→ Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Muschel und Seestern“:

Es gilt: $P(\text{Muschel und Seestern}) = P(\text{Muschel; Seestern}) + P(\text{Seestern; Muschel})$

Mit der Produktregel erhält man:

$$P(\text{Muschel; Seestern}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{6}{90} \quad \text{und} \quad P(\text{Seestern; Muschel}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

$$\text{Mit der Summenregel folgt: } P(\text{Muschel und Seestern}) = \frac{6}{90} + \frac{6}{90} = \frac{12}{90}$$

Einsetzen von $P(\text{zweimal Seestern}) = \frac{6}{90}$ und $P(\text{Muschel und Seestern}) = \frac{12}{90}$ in die Formel

$$E = \frac{2}{90} \cdot 9,00 \text{ €} + P(\text{zweimal Seestern}) \cdot 4,00 \text{ €} + P(\text{Muschel und Seestern}) \cdot 2,50 \text{ €} - 1,00 \text{ €} \text{ ergibt:}$$

$$E = \frac{2}{90} \cdot 9,00 \text{ €} + \frac{6}{90} \cdot 4,00 \text{ €} + \frac{12}{90} \cdot 2,50 \text{ €} - 1,00 \text{ €} = 0,20 \text{ €} + 0,27 \text{ €} + 0,33 \text{ €} - 1,00 \text{ €} = -0,20 \text{ €}$$

Ergebnis:

Der Erwartungswert beträgt aus Sicht eines Spielers -0,20 €. Ein Spieler muss also mit einem Verlust rechnen.

Der neue Gewinn für „zweimal Muschel“, damit das Gewinnspiel fair ist:

Wenn das Gewinnspiel fair sein soll, muss der neue Erwartungswert $E_{\text{neu}} = 0 \text{ €}$ sein.

Es muss also gelten:

$$E_{\text{neu}} = \frac{2}{90} \cdot x + \frac{6}{90} \cdot 4,00 \text{ €} + \frac{12}{90} \cdot 2,50 \text{ €} - 1,00 \text{ €} = 0 \text{ €}$$

Darin steht die Variable x für den neuen Gewinn des Ereignisses „zweimal Muschel“.

Auflösen der Gleichung nach x ergibt:

$$\frac{2}{90} \cdot x + \frac{6}{90} \cdot 4,00 \text{ €} + \frac{12}{90} \cdot 2,50 \text{ €} - 1,00 \text{ €} = 0 \text{ €}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{90} \cdot x + \frac{24}{90} \text{ €} + \frac{30}{90} \text{ €} - 1,00 \text{ €} = 0 \text{ €} \quad | \cdot 90$$

Man beachte, dass man *jeden* Summand mit 90 multiplizieren muss und dass $0 \text{ €} \cdot 90 = 0 \text{ €}$ ergibt.

$$\Leftrightarrow 2x + 24 \text{ €} + 30 \text{ €} - 90 \text{ €} = 0 \text{ €}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 36 \text{ €} = 0 \text{ €} \quad | +36 \text{ €}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 36 \text{ €} \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow x = 18 \text{ €}$$

Ergebnis:

Damit das Spiel fair wird, muss der Gewinn für das Ereignis „zweimal Muschel“ 18 € betragen.



Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W3

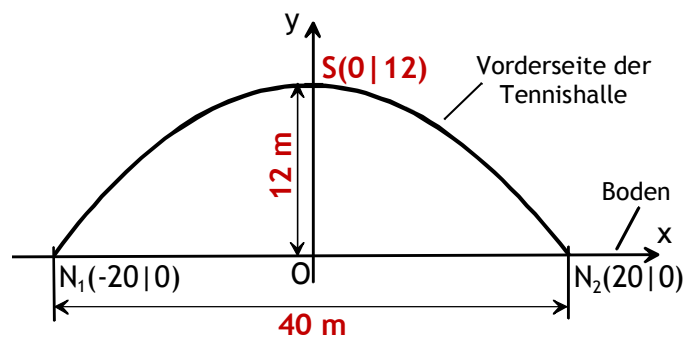
Aufgabe W3b:

Lösungsübersicht:

- Um die Vorderseite der Tennishalle mit einer **Funktionsgleichung** $y = ax^2 + c$ beschreiben zu können, muss man das Koordinatensystem so wählen, dass die y-Achse die Symmetrieachse der Vorderseite ist. Die x-Achse sollte auf dem Boden der Vorderseite liegen (siehe Figur 1). Der Wert für c ist dann die Höhe der Tennishalle. Den Wert für a erhält man, indem die Koordinaten eines Punktes der Parabel in die Gleichung $y = ax^2 + c$ einsetzt. Die Koordinaten eines solchen Punktes ergeben sich aus der Breite der Tennishalle (siehe Figur 1).
- Um den **Flächeninhalt des Fensters von Vorschlag 1** berechnen zu können, muss man die x-Koordinate eines oberen Eckpunkts $C(x_C | 10)$ des Fensters bestimmen (siehe Figur 2). Für die Breite b des Fensters gilt dann: $b = 2x_C$. Man erhält die Koordinate x_C , indem man $y = 10$ in die Parabelgleichung der Vorderseite einsetzt. Die Höhe des Fensters soll laut Aufgabenstellung $h = 10$ m sein. Den Flächeninhalt des rechteckigen Fensters kann man dann mit der Formel $A_1 = b \cdot h$ berechnen.
- Um den **Flächeninhalt des Fensters von Vorschlag 2** berechnen zu können, muss man die y-Koordinate eines oberen Eckpunkts $P(5 | y_P)$ des Fensters bestimmen. Die y-Koordinate y_P von P ist die Höhe des Fensters (siehe Figur 3). Man erhält y_P , indem man $x = 5$ in die Parabelgleichung der Vorderseite einsetzt. Die Breite des Fensters ist bei Vorschlag 2 laut Aufgabenstellung 10 m.

Eine mögliche Funktionsgleichung für die Vorderseite der Tennishalle:

Zunächst muss man in einem Koordinatensystem eine Skizze der Parabel erstellen, die das Profil der Vorderseite der Tennishalle beschreibt (siehe Figur 1). Diese Parabel muss symmetrisch zur y-Achse verlaufen, damit man die Parabel mit der allgemeinen Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben kann. Außerdem sollte die x-Achse auf Höhe des Bodens liegen. Der Scheitelpunkt der Parabel hat in diesem Koordinatensystem die Koordinaten $S(0 | 12)$, da die Tennishalle 12 m hoch ist.



Figur 1

Daraus erhält man sofort den c-Wert $c = 12$.

Die unvollständige Parabelgleichung lautet somit: $y = ax^2 + 12$

Den fehlenden a-Wert kann man nun mit Hilfe einer der beiden Nullstellen berechnen. Weil die Tennishalle 40 m breit ist und die Parabel symmetrisch zur y-Achse verläuft, haben diese Nullstellen die Koordinaten (siehe Figur 1):

$N_1(-20 | 0)$ und $N_2(20 | 0)$; (Hinweis: Es ist $40 \text{ m} : 2 = 20 \text{ m}$)

Einsetzen der Koordinaten von $N_2(20 | 0)$ in die Gleichung $y = ax^2 + 12$ ergibt:

$$0 = a \cdot 20^2 + 12$$

$$\Leftrightarrow 0 = a \cdot 400 + 12 \quad | -12$$

$$\Leftrightarrow -12 = a \cdot 400 \quad | : 400$$

$$\Leftrightarrow -0,03 = a \quad \text{bzw.} \quad a = -0,03$$

Damit lautet die Parabelgleichung im gewählten Koordinatensystem: $y = -0,03x^2 + 12$

(Hinweis: Man hätte auch die Koordinaten von $N_1(-20 | 0)$ in $y = ax^2 + 12$ einsetzen können.)

Ergebnis: Eine Gleichung der Parabel zur Beschreibung der Vorderseite ist $y = -0,03x^2 + 12$.

Lösungen zur Prüfung 2024: Wahlbereich - Aufgabe W3



Der Flächeninhalt des Fensters nach Vorschlag 1:

Ein oberer Eckpunkt des Fensters hat die Koordinaten $C(x_c | 10)$. Die Breite b des Fensters ist dann $b = 2x_c$ (siehe Figur 2).

Einsetzen von $y = 10$ in $y = -0,03x^2 + 12$ ergibt:

$$\begin{aligned} 10 &= -0,03x^2 + 12 & | -12 \\ \Leftrightarrow -2 &= -0,03x^2 & | :(-0,03) \\ \Leftrightarrow 66,67 &= x^2 & | \pm\sqrt{} \\ \Rightarrow x_1 &= 8,16 \text{ und } x_2 = -8,16 \end{aligned}$$

Es ist also $x_c = 8,16 \text{ m}$. Damit ist die Breite b des Fensters: $b = 2 \cdot 8,16 \text{ m} = 16,32 \text{ m}$

Die Höhe des Fensters ist $h = 10 \text{ m}$. Damit folgt für den Flächeninhalt des Fensters:

$$A_1 = 16,32 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 163,2 \text{ m}^2$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Fensters von Vorschlag 1 beträgt $A_1 = 163,2 \text{ m}^2$.

Der Flächeninhalt des Fensters nach Vorschlag 2:

Ein oberer Eckpunkt des Fensters hat die Koordinaten $P(5 | y_p)$. Darin ist die x-Koordinate $x = 5$ aus Symmetriegründen die halbe Breite und die y-Koordinate y_p die Höhe h des Fensters (siehe Figur 3).

Einsetzen von $x = 5$ in $y = -0,03x^2 + 12$ ergibt:

$$y_p = -0,03 \cdot 5^2 + 12 = 11,25$$

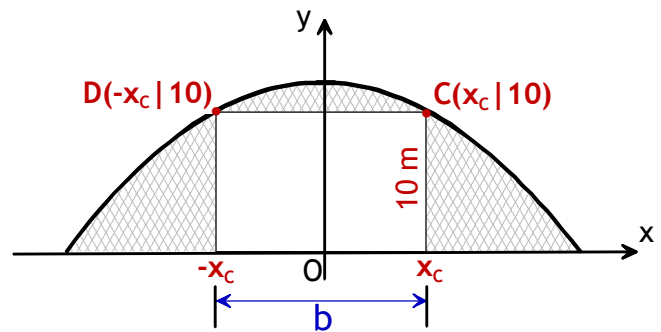
Die Höhe des Fensters ist also $h = 11,25 \text{ m}$.

Damit folgt für den Flächeninhalt des Fensters:

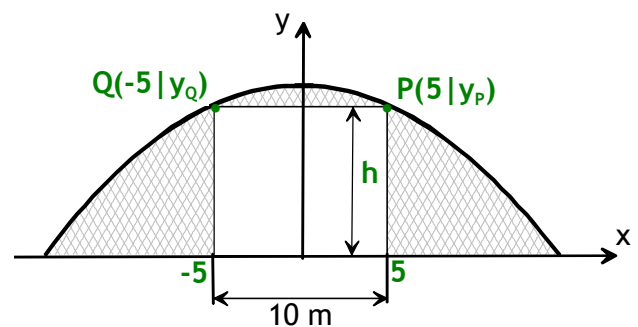
$$A_2 = 10 \text{ m} \cdot 11,25 \text{ m} = 112,5 \text{ m}^2$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Fensters von Vorschlag 2 beträgt $A_2 = 112,5 \text{ m}^2$.

Die Fensterfläche von Vorschlag 1 ist somit größer.



Figur 2



Figur 3