



Pflichtteil	2
Wahlteil - Aufgabe W1a	10
Wahlteil - Aufgabe W1b	12
Wahlteil - Aufgabe W2a	14
Wahlteil - Aufgabe W2b	15
Wahlteil - Aufgabe W3a	18
Wahlteil - Aufgabe W3b	20
Wahlteil - Aufgabe W4a	22
Wahlteil - Aufgabe W4b	24

Wichtige Hinweise zum Copyright:

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und nur für die eigene Nutzung zugelassen. Kopieren und Vervielfältigen der vorliegenden Datei ist verboten! Jede Nutzung in anderen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags.

Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung vervielfältigt oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Ausgenommen von diesen Regelungen ist die **Verwendung für folgende Unterrichtszwecke:**

So dürfen Lehrkräfte die vorliegende Datei zu Unterrichtszwecken ausdrucken, mit elektronischen Projektionsverfahren (wie Laptop und Beamer) einsetzen und OHP-Folien erstellen. Verboten ist allerdings die Weitergabe der Datei auf elektronischen Datenträgern.

Verstöße werden strafrechtlich verfolgt!

© Mathematik-Verlag 2026, Mosbach

Mathematik-Verlag Rainer Hild
Steige 44-2
74821 Mosbach
Internet: <https://matheverlag.com>
E-Mail: info@matheverlag.com

Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich



Aufgabe P1:

Lösungsübersicht:

Für den Umfang des Dreiecks ABF gilt: $u = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{AF}$, wobei $\overline{BF} = 6,6$ cm bereits angegeben ist. Die Länge $\overline{AB}$ kann im Dreieck ABC mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel β kennt (siehe Figur 1). Für den Winkel β gilt laut Aufgabenstellung $\beta = 2\beta_1$, wobei β_1 im Dreieck BCF mit der Kosinusfunktion berechnet werden kann (siehe Figur 2).

Für die Länge $\overline{AF}$ gilt: $\overline{AF} = \overline{AC} - \overline{FC}$. Die Länge $\overline{AC}$ kann im Dreieck ABC mit der Tangensfunktion berechnet werden. Die Länge $\overline{FC}$ kann im Dreieck BCF mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 2).

Tip: Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst im Dreieck BCF die Länge $\overline{FC}$ und den Winkel β_1 berechnen. Aus β_1 erhält man $\beta = 2\beta_1$, womit man dann im Dreieck ABC die Längen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ berechnen kann.

Berechnung des Umfangs des Dreiecks ABF:

Für den Umfang des Dreiecks ABF gilt: $u = \overline{AB} + 6,6 + \overline{AF}$.

→ Berechnung der Länge $\overline{AB}$:

Für $\overline{AB}$ gilt im Dreieck ABC (siehe Figur 1):

$$\cos \beta = \frac{5,8}{\overline{AB}}$$

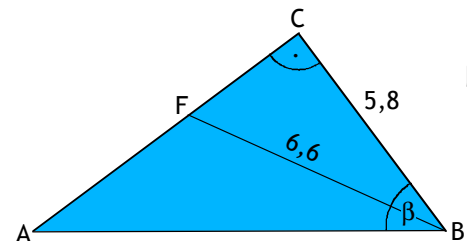
Für den Winkel β gilt laut Aufgabenstellung $\beta = 2\beta_1$. Der Winkel β_1 kann im Dreieck BCF mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt:

$$\cos \beta_1 = \frac{5,8}{6,6} \Rightarrow \beta_1 = 28,5^\circ \text{ und damit } \beta = 57,0^\circ.$$

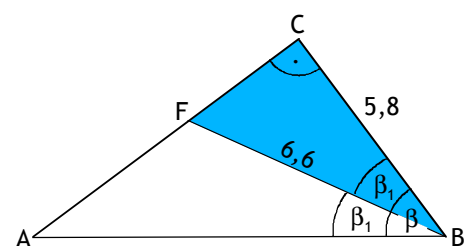
Einsetzen von $\beta = 57^\circ$ in $\cos \beta = \frac{5,8}{\overline{AB}}$ ergibt:

$$\cos 57^\circ = \frac{5,8}{\overline{AB}} \quad | \cdot \overline{AB} \quad | : \cos 57^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5,8}{\cos 57^\circ} \text{ bzw. } \overline{AB} = \underline{\underline{10,65 \text{ cm}}}$$



Figur 1



Figur 2

→ Berechnung der Länge $\overline{AF}$:

Für $\overline{AF}$ gilt: $\overline{AF} = \overline{AC} - \overline{FC}$.

- Die Länge $\overline{AC}$ kann im Dreieck ABC mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 1). Mit $\beta = 57^\circ$ gilt:

$$\tan 57^\circ = \frac{\overline{AC}}{5,8} \quad | \cdot 5,8$$

$$\Leftrightarrow 8,93 = \overline{AC} \text{ bzw. } \overline{AC} = 8,93 \text{ cm}$$

- Die Länge $\overline{FC}$ kann im Dreieck BCF mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt:

Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich



$$\overline{FC}^2 + 5,8^2 = 6,6^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{FC}^2 + 33,64 = 43,56 \quad | -33,64$$

$$\Leftrightarrow \overline{FC}^2 = 9,92 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \overline{FC} = 3,15 \text{ cm}$$

$$\text{Mit } \overline{AC} = 8,93 \text{ cm und } \overline{FC} = 3,15 \text{ cm folgt für } \overline{AF} = \overline{AC} - \overline{FC}: \quad \overline{AF} = \underline{5,78 \text{ cm}}$$

Mit $\overline{AB} = 10,65 \text{ cm}$ und $\overline{AF} = 5,78 \text{ cm}$ erhält man schließlich: $u = 10,65 \text{ cm} + 6,6 \text{ cm} + 5,78 \text{ cm} = \underline{23,03 \text{ cm}}$

Ergebnis: Der Umfang des Dreiecks ABF beträgt $u = 23,03 \text{ cm}$.

Aufgabe P2:

Lösungsübersicht:

Für die Länge EF gilt: $\overline{EF} = \overline{BE} - \overline{BF}$

Die Länge BE kann im Dreieck BCE mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).

Für die Länge BF gilt: $\overline{BF} = 2 \cdot \overline{BM}$ (siehe Figur 2). Die Strecke BM kann im Dreieck ABM berechnet werden, wenn man den Winkel β_1 bei Punkt B kennt (siehe Figur 2). Da dieser Winkel ein Stufenwinkel zu ε ist, beträgt er ebenfalls $72,0^\circ$.

Tipp: Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst im Dreieck BCE alle Seitenlängen und den fehlenden Winkel berechnen. Außerdem sollten Sie im gleichschenkligen Dreieck ABF die Höhe auf die Grundseite BF einzeichnen. Beachten Sie auch, dass $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt, weil ABCD ein Quadrat ist.

Berechnung der Länge EF:

Für die Länge EF gilt: $\overline{EF} = \overline{BE} - \overline{BF}$

→ Berechnung der Länge BE:

Für BE gilt im Dreieck BCE (siehe Figur 1):

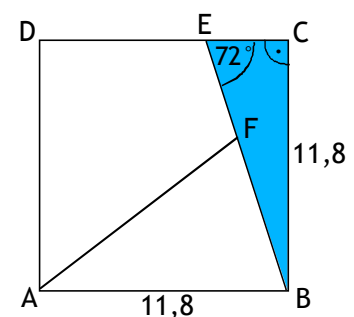
$$\sin 72^\circ = \frac{11,8}{\overline{BE}} \quad | \cdot \overline{BE} \quad | : \sin 72^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{11,8}{\sin 72^\circ} \quad \text{bzw.} \quad \overline{BE} = \underline{12,41 \text{ cm}}$$

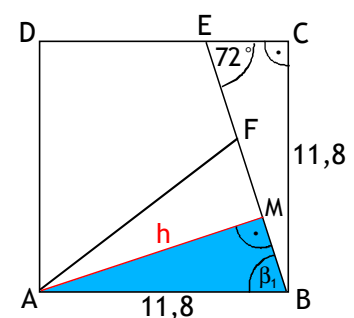
→ Berechnung der Länge BF:

Zur Berechnung der Länge BF muss man zuerst die Höhe h des gleichschenkligen Dreiecks ABF einzeichnen und beachten, dass die Höhe h die Grundseite BF halbiert: $\overline{BM} = 0,5 \cdot \overline{BF}$. Im Dreieck ABM der Figur 2 gilt dann:

$$\cos \beta_1 = \frac{0,5 \cdot \overline{BF}}{11,8}$$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich



Da der Winkel β_1 ein Wechselwinkel zu $\varepsilon = 72^\circ$ ist, gilt: $\beta_1 = 72^\circ$.

(Hinweis: β_1 kann auch mit $\beta_1 = 90^\circ - \beta_2$ berechnet werden. Den Winkel β_2 erhält man aus der Summe der Innenwinkel in Dreieck BCE: $\beta_1 = 18^\circ$.)

Mit $\beta_1 = 72^\circ$ folgt für $\cos \beta_1 = \frac{0,5 \cdot \overline{BF}}{11,8}$:

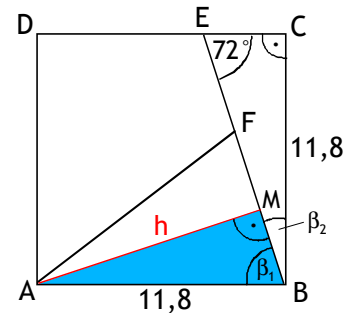
$$\cos 72^\circ = \frac{0,5 \cdot \overline{BF}}{11,8} \quad | \cdot 11,8 \quad | : 0,5$$

$$\Leftrightarrow 7,29 = \overline{BF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{BF} = \underline{7,29 \text{ cm}}$$

Für die Länge $\overline{EF} = \overline{BE} - \overline{BF}$ folgt mit $\overline{BE} = 12,41 \text{ cm}$ und $\overline{BF} = 7,29 \text{ cm}$:

$$\overline{EF} = 12,41 \text{ cm} - 7,29 \text{ cm} = 5,12 \text{ cm}$$

Ergebnis: Die Länge der Strecke $\overline{EF}$ beträgt $\overline{EF} = 5,12 \text{ cm}$.



Figur 3

Aufgabe P3:

Lösungsübersicht:

Die Oberfläche O_{ZUS} des zusammengesetzten Körpers setzt sich aus dem Mantel der Pyramide und der Oberfläche des halben Zylinders zusammen (ohne die quadratische Kontaktfläche).

Es gilt also (siehe Formelsammlung): $O_{\text{ZUS}} = 2a \cdot h_s + \frac{1}{2} \cdot (2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h) = 2a \cdot h_s + \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot h$

Darin ist a die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche, h_s ist die Höhe eines Seitendreiecks der Pyramide, r ist der Radius des Halbkreises des Halbzylinders und h ist die Höhe des Halbzylinders. Für r und h gilt (siehe Figur 1): $r = 0,5a$ und $h = a$.

Zur Berechnung der Oberfläche O_{ZUS} des zusammengesetzten Körpers benötigt man also die Seitenlänge a und die Höhe h_s . Diese beiden Größen können mit den angegebenen Größen $h_p = 16,0 \text{ cm}$ und $\varepsilon = 58,0^\circ$ berechnet werden (siehe Figur 1 und 2).

Berechnung der Oberfläche O_{ZUS} des zusammengesetzten Körpers:

Für die Oberfläche O_{ZUS} des zusammengesetzten Körpers gilt: $O_{\text{ZUS}} = M_{\text{Pyr}} + O_{\text{HZyl}}$

Für die Mantelfläche M_{Pyr} der Pyramide gilt (siehe Formelsammlung): $M_{\text{Pyr}} = 2a \cdot h_s$

Für die Oberfläche O_{HZyl} des Halbzylinders gilt (siehe Formelsammlung): $O_{\text{HZyl}} = \frac{1}{2} \cdot (2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h) = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot h$

Damit ist $O_{\text{ZUS}} = 2a \cdot h_s + \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot h$. Mit $r = 0,5a$ und $h = a$ erhält man:

$$O_{\text{ZUS}} = 2a \cdot h_s + \pi \cdot (0,5a)^2 + \pi \cdot (0,5a) \cdot a = 2a \cdot h_s + \pi \cdot 0,25a^2 + \pi \cdot 0,5a^2$$

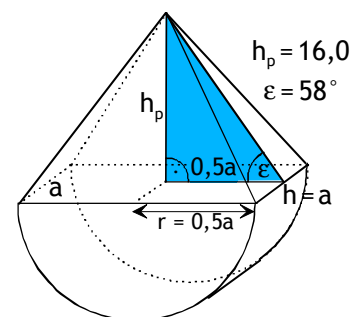
→ Berechnung der Länge a :

Im markierten Dreieck der Figur 1 gilt mit $h_p = 16$ und $\varepsilon = 58^\circ$:

$$\tan 58^\circ = \frac{16}{0,5a} \quad | \cdot 0,5a \quad | : \tan 58^\circ$$

$$\Leftrightarrow 0,5a = 10,0 \quad | : 0,5$$

$$\Leftrightarrow \underline{a = 20,0 \text{ cm}}$$



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich



→ Berechnung der Seitenhöhe h_s :

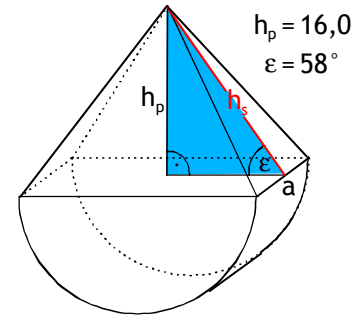
Im markierten Dreieck der Figur 2 gilt mit $h_p = 16$ und $\varepsilon = 58^\circ$:

$$\sin 58^\circ = \frac{16}{h_s} \quad | \cdot h_s \quad | : \sin 58^\circ$$

$$\Leftrightarrow \underline{h_s = 18,87 \text{ cm}}$$

Mit $a = 20,0 \text{ cm}$ und $h_s = 18,87 \text{ cm}$ folgt für $O_{\text{zus}} = 2a \cdot h_s + \pi \cdot 0,25a^2 + \pi \cdot 0,5a^2$:

$$O_{\text{zus}} = 754,8 \text{ cm}^2 + 942,5 \text{ cm}^2 = 1697,3 \text{ cm}^2$$



Figur 2

Ergebnis: Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers beträgt $O_{\text{zus}} = 1697,3 \text{ cm}^2$.

Aufgabe P4:

Überprüfung der Aussage $P(AS=6) > P(AS=9)$:

Bei folgenden Ergebnissen trifft das Ereignis „Augensumme $AS=6$ “ ein: (1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)

Darin steht die erste Zahl für die Augenzahl des ersten Würfels und die zweite Zahl für die Augenzahl des zweiten Würfels.

Die Ergebnisse, bei denen das Ereignis „Augensumme $AS=9$ “ eintritt, sind: (3; 6), (4; 5), (5; 4), (6; 3)

Da jede Augenzahl bei einem idealen Würfel die gleiche Wahrscheinlichkeit hat - nämlich $p = \frac{1}{6}$, hat

jedes der obigen Ergebnisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Mit der Summenregel folgt: $P(AS=6) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36} \approx 13,9 \%$ und

$$P(AS=9) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} \approx 11,1 \%$$

Die Aussage $P(AS=6) > P(AS=9)$ ist also richtig.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Nele mit dem nächsten Wurf gewinnt:

Nele gewinnt dann, wenn die Augensumme (AS) ihres Wurfs größer als 8 ist; also bei $AS = 9; 10; 11$ oder 12 .

Die Wahrscheinlichkeiten für diese Augensummen sind:

$$P(AS=9) = \frac{4}{36} \text{ (siehe oben)}$$

$$P(AS=10) = P(4; 6) + P(5; 5) + P(6; 4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P(AS=11) = P(5; 6) + P(6; 5) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$$

$$P(AS=12) = P(6; 6) = \frac{1}{36}$$

Mit der Summenregel erhält man:

$$P(\text{Nele gewinnt}) = P(AS=9) + P(AS=10) + P(AS=11) + P(AS=12) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36} \approx 27,8 \%$$

Ergebnis:

Die Wahrscheinlichkeit, dass Nele mit dem nächsten Wurf das Spiel gewinnt, beträgt $\frac{10}{36} \approx 27,8 \%$.

Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich



Aufgabe P5:

Die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts Q:

Um die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts von p und g berechnen zu können, benötigt man die Funktionsgleichungen von p und g.

→ Die Funktionsgleichung von p:

Dem Schaubild entnimmt man, dass die Parabel p durch die Punkte A(-3|0) und B(1|0) verläuft. Durch Einsetzen der Koordinaten von A(-3|0) und B(1|0) in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\text{Mit A}(-3|0): \quad 0 = (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \Leftrightarrow 0 = 9 - 3b + c \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit B}(1|0): \quad 0 = 1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow 0 = 1 + b + c \quad (\text{II})$$

$$(I) - (II) \text{ ergibt: } 0 = 8 - 4b \quad | +4b$$

$$\Leftrightarrow 4b = 8 \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow b = 2$$

Einsetzen von $b = 2$ in Gleichung (II) $0 = 1 + b + c$ ergibt:

$$0 = 1 + 2 + c$$

$$\Leftrightarrow 0 = 3 + c \quad | -3$$

$$\Leftrightarrow -3 = c \text{ bzw. } c = -3$$

Die Funktionsgleichung der Parabel p lautet also p: $y = x^2 + 2x - 3$.

→ Berechnung der Gleichung der Geraden g:

Um in der Gleichung $y = 3x + c$ den Wert von c bestimmen zu können, muss man die Koordinaten eines Geradenpunkts einsetzen. Ein solcher Punkt soll laut Aufgabenstellung der Scheitelpunkt S der Parabel p sein, dessen Koordinaten man mithilfe einer quadratischen Ergänzung der Parabelgleichung bestimmen kann:

$$y = x^2 + 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 2x + 1^2 - 3 - 1^2 \quad | \text{Anwenden der ersten binomischen Formel}$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 1)^2 - 3 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 1)^2 - 4. \text{ Dieser Scheitelform entnimmt man: } S(-1|-4)$$

Einsetzen der Koordinaten von S(-1|-4) in $y = 3x + c$ ergibt:

$$-4 = 3 \cdot (-1) + c$$

$$\Leftrightarrow -4 = -3 + c \quad | +3$$

$$\Leftrightarrow -1 = c \text{ bzw. } c = -1$$

Die Gleichung der Geraden g lautet also g: $y = 3x - 1$.

Durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen von p und g kann man nun die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts von p und g berechnen:

$$x^2 + 2x - 3 = 3x - 1 \quad | -3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1x - 2 = 0$$

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich



$$x_1 = -(-0,5) + \sqrt{(0,5)^2 - (-2)} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -(-0,5) - \sqrt{(0,5)^2 - (-2)} = -1$$

Das sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte von g und p. Die entsprechenden y-Koordinaten erhält man durch Einsetzen in die Funktionsgleichung von g oder p.

Einsetzen von $x_1 = 2$ in $y = 3x - 1$ ergibt: $y_1 = 5 \Rightarrow Q(2|5)$

Einsetzen von $x_2 = -1$ in $y = 3x - 1$ ergibt: $y_2 = -4 \Rightarrow S(-1|-4)$ = Scheitelpunkt von p (siehe oben).

Ergebnis: Der zweite Schnittpunkt von g und p ist der Punkt $Q(2|5)$.

Aufgabe P6:

Die Lösungen der Gleichung:

$$\begin{aligned} (2x - 1)(2x + 1) - x(x - 2) &= (x - 5)^2 + 6 && | \text{ Man benötigt die dritte und die zweite binomische Formel.} \\ \Leftrightarrow (2x)^2 - 1^2 - x^2 + 2x &= x^2 - 10x + 5^2 + 6 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 1 - x^2 + 2x &= x^2 - 10x + 25 + 6 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 1 + 2x &= x^2 - 10x + 31 && | -x^2 + 10x - 31 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 32 + 12x &= 0 && | :2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 16 + 6x &= 0 && | \text{ Vertauschen von „-16“ und „+6x“} \\ \Leftrightarrow x^2 + 6x - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$$x_1 = -3 + \sqrt{(3)^2 - (-16)} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -3 - \sqrt{(3)^2 - (-16)} = -8$$

Ergebnis: Die Lösungen der Gleichung sind $x_1 = 2$ und $x_2 = -8$.

Aufgabe P7:

Anzahl der Reisen nach Österreich:

Gesucht ist der Prozentwert W; nämlich 6,1 % von 54 000 Reisen. Man erhält:

$$W = \frac{6,1}{100} \cdot 54\,000 \text{ Reisen} = 3294 \text{ Reisen}$$

Ergebnis: Es wurden 3294 Reisen nach Österreich gebucht.

Anzahl der Reisen nach Bayern:

Zunächst muss die Anzahl der Reisen nach *Deutschland* berechnet werden.

Gesucht ist der Prozentwert W_1 ; nämlich 37,5 % von 54 000 Reisen. Man erhält:

$$W_1 = \frac{37,5}{100} \cdot 54\,000 \text{ Reisen} = 20250 \text{ Reisen nach Deutschland}$$

Von diesen 20250 Reisen nach Deutschland sind 18,0 % auf Bayern entfallen. Gesucht ist nun der Prozentwert W_2 ; nämlich 18,0 % von 20250 Reisen. Man erhält:

$$W_2 = \frac{18,0}{100} \cdot 20250 \text{ Reisen} = 3645 \text{ Reisen nach Bayern}$$

Ergebnis: Es wurden 3645 Reisen nach Bayern gebucht.

Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich



Der Anteil der Reisen in die USA an den „sonstigen“ Urlaubszielen:

Zunächst muss man berechnen, wie viele Reisen zu den „sonstigen“ Urlaubszielen gebucht wurden. Gesucht ist der Prozentwert W_3 ; nämlich 17,6 % von 54 000 Reisen. Man erhält:

$$W_3 = \frac{17,6}{100} \cdot 54\,000 \text{ Reisen} = 9504 \text{ Reisen zu „sonstigen“ Urlaubszielen}$$

Von diesen 9504 Reisen gingen 704 Reisen in die USA. Der entsprechende prozentuale Anteil ist:

$$P \% = \frac{704}{9504} \cdot 100 \% \approx 7,4 \%$$

Ergebnis: Der Anteil der USA-Reisen an den sonstigen Urlaubszielen beträgt 7,4 %.

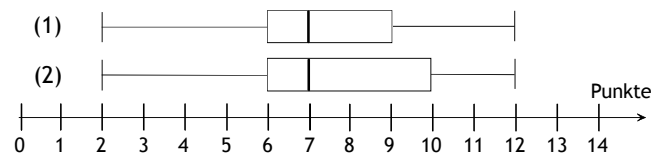
Aufgabe P8:

Der Boxplot für Klasse 10a:

Beide Boxplots unterscheiden sich lediglich im Wert des oberen Quartils q_0 .

In Boxplot (1) ist $q_{0,1} = 9$ Punkte

In Boxplot (2) ist $q_{0,2} = 10$ Punkte



Um das obere Quartil der Klasse 10a bestimmen zu können, muss man anhand des angegebenen Säulendiagramms eine Rangliste (= geordnete Urliste) erstellen. Man erhält:

Rangliste von Klasse 10a:

2; 3; 3; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 9; 9; 9; 9; 10; 10; 11; 12; 12;

(Hinweis: Die Zahlen stehen für die erreichten Punkte. Da nur 1 Schüler 2 Punkte erzielt hat, ist nur 1-Mal die „2“ aufgelistet. 2 Schüler haben 3 Punkte erreicht, also steht in der Rangliste 2-Mal die „3“, usw.)

Zur Bestimmung des oberen Quartils benötigt man den Wert $n \cdot \frac{3}{4}$.

Der Wert für n ist die Anzahl der Schüler, die man aus dem Diagramm erhält, wenn man entweder alle Säulenhöhen addiert oder die Länge der Rangliste abzählt:

Klasse 10a hat $1 + 2 + 2 + 4 + 5 + 2 + 4 + 2 + 1 + 2 = 25$ Schüler. Es ist also: $n_{10a} = 25$

Wegen $25 \cdot \frac{3}{4} = 18,75$ liegt das obere Quartil von Klasse 10a **am 19. Platz** der Rangliste (siehe oben); also hat Klasse 10a das obere Quartil $q_{0,10a} = 9$. Somit muss der Boxplot (1) zur Klasse 10a gehören.

Ergebnis: Boxplot (1) gehört zu Klasse 10a.

Ergänzung des Diagramms von Klasse 10b:

Zunächst muss man anhand des unvollständigen Säulendiagramms eine unvollständige Rangliste der Klasse 10b erstellen. Man erhält:

2; 3; 3; 4; 4; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; _____ ; 11; 12; 12; 12

Anhand folgender Überlegungen kann man dann die möglichen Lösungen für die Anzahl der Schüler mit 9 bzw. 10 Punkten herausfinden:

Die unvollständige Rangliste enthält nur 22 Einträge. Da die Klasse 10b laut Aufgabenstellung 29 Schüler hat, fehlen noch 7 Einträge. Da nun im Boxplot von Klasse 10b das obere Quartil $q_{0,10b} = 10$ ist, muss man die Lücken in der unvollständigen Rangliste so ergänzen, dass am Platz des oberen Quartils die Zahl 10 steht. (Die anderen Kennwerte des Boxplots der Klasse 10b haben keine Auswirkung auf die Rangliste.)

Welcher Platz dies ist, kann man leicht mit der Formel $n \cdot \frac{3}{4}$ bestimmen.

Lösungen zur Prüfung 2017: Pflichtbereich



Wegen $29 \cdot \frac{3}{4} = 21,75$ muss also am **22. Platz** der Rangliste von Klasse 10b der Eintrag „10“ Punkte stehen. Die Rangliste der Klasse 10b muss demnach folgendermaßen aussehen:

2; 3; 3; 4; 4; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; __; __; __; 10; __; __; __; 11; 12; 12; 12;

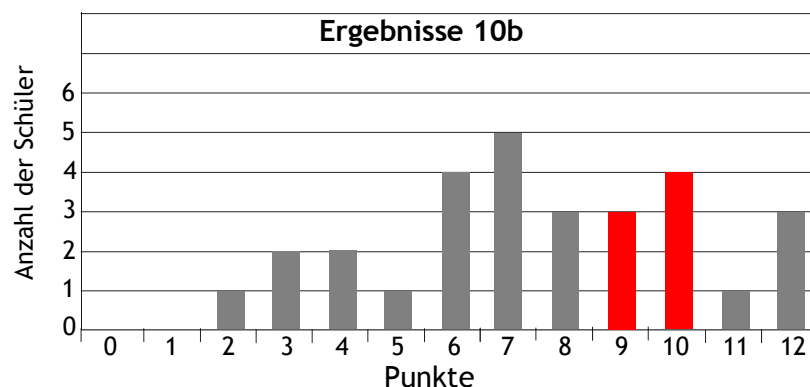
Da rechts davon keine kleineren Zahlen stehen dürfen, kann die Rangliste weiter ergänzt werden:

2; 3; 3; 4; 4; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; __; __; __; 10; 10; 10; 10; 10; 11; 12; 12; 12;

Die fehlenden 3 Lücken können nun mit „9“ oder „10“ ergänzt werden. Mögliche Lösungen sind also:

Anzahl der Schüler mit 9 Punkten:	0	1	2	3
Anzahl der Schüler mit 10 Punkten:	7	6	5	4

Eine mögliche Lösung ist in folgendem Diagramm eingetragen:



Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1a:

Lösungsübersicht:

• Zunächst sollte man den **Abstand von E zur Strecke $\overline{AB}$** einzeichnen. Der Endpunkt dieses Abstands sei der Punkt F (siehe Figur 1). Die Länge $\overline{EF}$ kann dann im Dreieck AFE mit der Sinusfunktion berechnet werden, wenn man die Länge $\overline{AE}$ kennt. Für $\overline{AE}$ gilt: $\overline{AE} = \overline{AD} - \overline{DE}$, mit $\overline{DE} = 3,0$ cm. Die Länge $\overline{AD}$ wiederum kann im Dreieck ABD mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

• Den **Winkel γ** kann man im gleichschenkligen Dreieck ABC mit dem Basiswinkel β berechnen (s. Figur 3). Es gilt: $\gamma + 2\beta = 180^\circ$. Der Winkel β lässt sich im Dreieck FBE mit der Tangensfunktion aus der bereits berechneten Strecke $\overline{EF}$ und der Strecke $\overline{BF}$ bestimmen (siehe Figur 4). Zur Berechnung der Strecke $\overline{BF}$ muss man zuerst noch die Hilfslinie $\overline{EG}$ einzeichnen, deren Länge im Dreieck EGD mit der Sinusfunktion berechnet werden kann (siehe Figur 4).

Tipp: Wenn Sie zunächst überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, berechnen Sie mit den angegebenen Größen im Dreieck ABD alle fehlenden Seiten und Winkel. Anschließend können Sie $\overline{AE} = \overline{AD} - 3,0$ berechnen und damit alle fehlenden Größen im Dreieck AFE.

Berechnung des Abstands des Punktes E von der Strecke $\overline{AB}$:

Die Länge $\overline{EF}$ kann im Dreieck AFE mit der Sinusfunktion berechnet werden, wenn man die Länge $\overline{AE}$ kennt. Mit $\alpha = 42^\circ$ gilt (siehe Figur 1):

$$\sin 42^\circ = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}}$$

→ Berechnung der Länge $\overline{AE}$:

Für die Länge $\overline{AE}$ gilt: $\overline{AE} = \overline{AD} - 3,0$ cm

Die Länge $\overline{AD}$ wiederum kann im Dreieck ABD mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt:

$$\sin 42^\circ = \frac{7,2}{\overline{AD}} \quad | \cdot \overline{AD} \quad | : \sin 42^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{7,2}{\sin 42^\circ} \text{ bzw. } \overline{AD} = 10,76 \text{ cm}$$

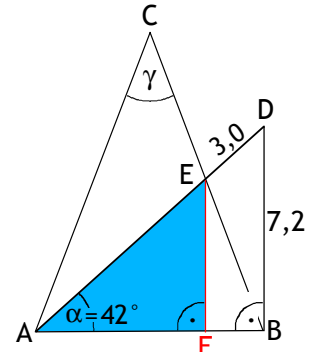
Für $\overline{AE} = \overline{AD} - 3,0$ cm folgt somit: $\overline{AE} = \underline{7,76 \text{ cm}}$

Einsetzen von $\overline{AE} = 7,76$ cm in $\sin 42^\circ = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}}$ ergibt:

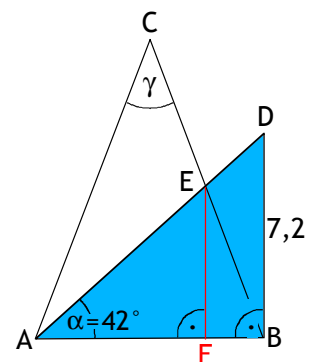
$$\sin 42^\circ = \frac{\overline{EF}}{7,76} \quad | \cdot 7,76$$

$$\Leftrightarrow 5,19 = \overline{EF} \text{ bzw. } \overline{EF} = \underline{5,19 \text{ cm}}$$

Ergebnis: Der Abstand des Punktes E von $\overline{AB}$ beträgt 5,19 cm.



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W1



Berechnung des Winkels γ :

Der Winkel γ kann mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC berechnet werden (siehe Figur 3): $\gamma + 2\beta = 180^\circ \Leftrightarrow \gamma = 180^\circ - 2\beta$

(Man beachte, dass im gleichschenkligen Dreieck ABC die beiden Basiswinkel bei A und B gleich groß sind.)

Den Winkel β kann man im Dreieck FBE mit der Tangensfunktion aus $\overline{EF} = 5,19$ cm (siehe oben) und $\overline{BF}$ bestimmen (siehe Figur 4). Es gilt:

$$\tan \beta = \frac{5,19}{\overline{BF}}$$

→ Berechnung der Länge $\overline{BF}$:

Die Länge $\overline{BF}$ kann mit der Hilfslinie $\overline{EG}$ berechnet werden (siehe Figur 4). Es gilt: $\overline{BF} = \overline{EG}$

Im Dreieck EGD gilt: $\sin \delta = \frac{\overline{EG}}{3,0}$

Der Winkel δ wiederum kann über die Summe der Innenwinkel im Dreieck ABD berechnet werden.

Es gilt (siehe Figur 5): $42^\circ + 90^\circ + \delta = 180^\circ \Leftrightarrow \delta = 48^\circ$

Damit folgt: $\sin 48^\circ = \frac{\overline{EG}}{3,0} \quad | \cdot 3,0$

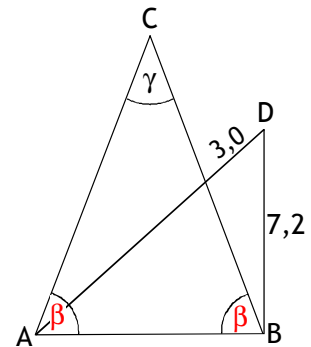
$2,23 = \overline{EG}$ bzw. $\overline{EG} = 2,23$ cm und $\overline{BF} = \underline{2,23}$ cm

Einsetzen von $\overline{BF} = 2,23$ cm in $\tan \beta = \frac{5,19}{\overline{BF}}$ ergibt:

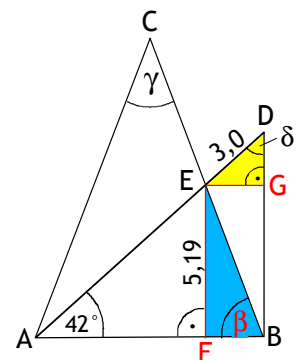
$$\tan \beta = \frac{5,19}{2,23} \Rightarrow \underline{\beta = 66,75^\circ}$$

Für $\gamma = 180^\circ - 2\beta$ erhält man damit: $\gamma = \underline{46,5^\circ}$

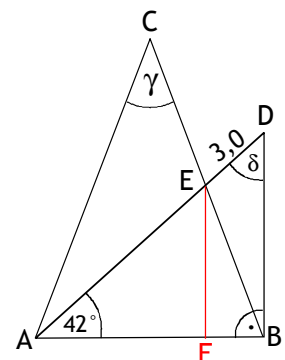
Ergebnis: Der Winkel γ beträgt $\underline{\gamma = 46,5^\circ}$.



Figur 3



Figur 4



Figur 5

Hinweis:

Die Strecke $\overline{BF}$ kann alternativ auch mit $\overline{BF} = \overline{AB} - \overline{AF}$ berechnet werden.

Die Strecke $\overline{AB}$ kann im Dreieck ABD mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

Die Strecke $\overline{AF}$ erhält man mit der Tangensfunktion und $\overline{EF} = 5,19$ cm im Dreieck AFE (siehe Figur 1).

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1b:

Lösungsübersicht:

- Für den Flächeninhalt des Trapezes ABCD gilt: $A = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AD}$ (siehe Formelsammlung und Figur 1)

Darin ist $\overline{AD} = 2 \overline{AG}$ die Höhe des Trapezes.

Um die angegebene Formel für den Flächeninhalt des Trapezes zu bestätigen, muss man die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ in Abhängigkeit von e ausdrücken. Dazu sollte man zunächst das regelmäßige Sechseck in 6 gleichseitige Dreiecke unterteilen. Die benötigten Streckenabschnitte $\overline{AE}$ und $\overline{AG}$ kann man dann im Dreieck AEG in Abhängigkeit von e bestimmen (siehe Figur 1).

- Die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$ kann im markierten Dreieck der Figur 4 mit dem Satz des Pythagoras in Abhängigkeit von e bestimmt werden.

Nachweis der Formel $A = 8e^2\sqrt{3}$ für den Flächeninhalt des Trapezes:

Für den Flächeninhalt des Trapezes gilt: $A = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AD}$

Darin ist $\overline{AD}$ die Höhe des Trapezes.

→ Berechnung der Strecke $\overline{AB}$ in Abhängigkeit von e :

$$\text{Es gilt: } \overline{AB} = \overline{AE} + 2e + 2e = \overline{AE} + 4e$$

Die Strecke $\overline{AE}$ kann im Dreieck AEG mit der Kosinusfunktion bestimmt werden (siehe Figur 1). Die Innenwinkel des Dreiecks AEG erhält man aus den Innenwinkeln der 6 gleichseitigen Dreiecke des Sechsecks, die jeweils 60° betragen (siehe Figur 1).

$$\text{Im Dreieck AEG gilt also: } \cos 60^\circ = \frac{\overline{AE}}{2e}$$

$$\text{Mit } \cos 60^\circ = 0,5 \text{ folgt: } 0,5 = \frac{\overline{AE}}{2e} \quad | \cdot 2e$$

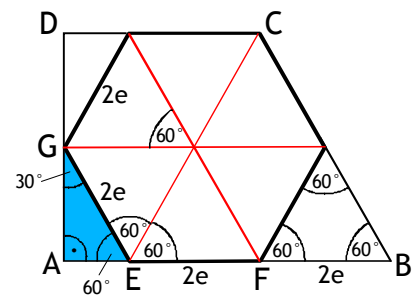
$$\Leftrightarrow e = \overline{AE} \text{ bzw. } \overline{AE} = e$$

$$\text{Für } \overline{AB} = \overline{AE} + 4e \text{ folgt damit: } \underline{\overline{AB} = 5e}$$

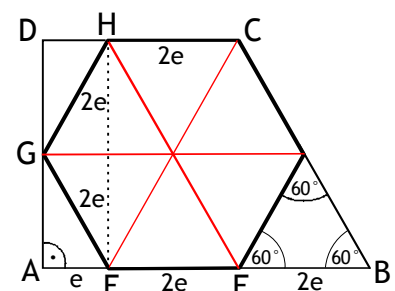
→ Berechnung der Strecke $\overline{CD}$ in Abhängigkeit von e :

$$\text{Es gilt: } \overline{CD} = \overline{DH} + 2e \text{ (siehe Figur 2)}$$

$$\text{Wegen } \overline{DH} = \overline{AE} = e \text{ folgt sofort: } \underline{\overline{CD} = 3e}$$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W1



→ Berechnung der Strecke $\overline{AD}$ in Abhängigkeit von e :

Es gilt: $\overline{AD} = 2 \overline{AG}$ (siehe Figur 3)

Die Strecke $\overline{AG}$ kann im Dreieck AEG mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden, da die Strecke $\overline{AE} = e$ bereits oben bestimmt wurde. Es gilt:

$$\overline{AG}^2 + e^2 = (2e)^2$$

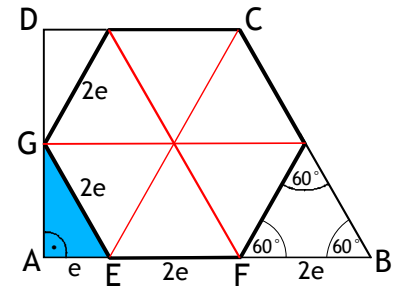
$$\Leftrightarrow \overline{AG}^2 + e^2 = 4e^2 \quad | -e^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 3e^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG} = \sqrt{3e^2} = e\sqrt{3}$$

Damit folgt für $\overline{AD} = 2 \overline{AG}$:

$$\underline{\overline{AD} = 2e\sqrt{3}}$$



Figur 3

Mit $\overline{AB} = 5e$, $\overline{CD} = 3e$ und $\overline{AD} = 2e\sqrt{3}$ folgt für den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AD}$:

$$A = \frac{1}{2} (5e + 3e) \cdot 2e\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 8e \cdot 2e\sqrt{3} = 8e^2\sqrt{3}; \text{ was zu zeigen war.}$$

Die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$:

Die Länge $\overline{AC}$ kann im Dreieck AFC mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden (siehe Figur 4).

$$\text{Es gilt: } \overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2$$

Mit $\overline{AF} = e + 2e = 3e$ und $\overline{CF} = \overline{AD} = 2e\sqrt{3}$ folgt (siehe Figur 4):

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (3e)^2 + (2e\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 9e^2 + (2e)^2 \cdot (\sqrt{3})^2$$

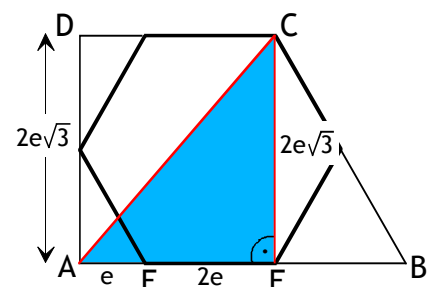
$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 9e^2 + 4e^2 \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 9e^2 + 12e^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 21e^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{21e^2} = e\sqrt{21}$$

Ergebnis: Die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$ ist $\underline{\overline{AC} = e\sqrt{21}}$.



Figur 4

Hinweis:

Die Längen $\overline{AE} = e$ und $\overline{AD} = 2e\sqrt{3}$ wurden bereits oben berechnet.

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W2



Aufgabe W2a:

Lösungsübersicht:

Zur Berechnung des Pyramidenvolumens $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} G \cdot h_{\text{Pyr}}$ benötigt man den Flächeninhalt der Grundfläche G und die Pyramidenhöhe h_{Pyr} .

- Um die **Grundfläche G** der fünfseitigen Pyramide berechnen zu können, muss man die Länge der Kante a und die Höhe h_1 eines der fünf gleichschenkligen Dreiecke der Grundfläche kennen (siehe Figur 1 und 2). Die Länge a kann mit der Mantelfläche des Zylinders bestimmt werden (siehe Figur 3). Mit dem Wert von a kann dann in einem der gleichschenkligen Dreiecke der **Grundfläche** auch die Höhe h_1 berechnet werden (siehe Figur 1).
- Die **Pyramidenhöhe h_{Pyr}** kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 4). Die dafür benötigte Höhe h_1 wurde bereits berechnet. Die Höhe h_s eines der Seitendreiecke der Pyramide ist mit der angegebenen Höhe $h = 12,0 \text{ cm}$ des abgerollten Zylindermantels identisch (siehe Figur 5).

Berechnung des Pyramidenvolumens:

Für das Volumen der fünfseitigen Pyramide gilt (siehe Formelsammlung): $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} G \cdot h_{\text{Pyr}}$

→ Berechnung der Grundfläche G :

Die Grundfläche G der fünfseitigen Pyramide besteht aus fünf gleichschenkligen Dreiecken.

Für den Flächeninhalt eines dieser Dreiecke gilt (siehe Figur 1): $A_{\text{ABM}} = \frac{1}{2} a \cdot h_1$

Somit gilt für die Grundfläche: $G = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1 = \frac{5}{2} a \cdot h_1$

Beachte:

- 1.) Der Mittelpunktswinkel der Grundfläche G beträgt $72^\circ (= 360^\circ : 5)$.
- 2.) Die Höhe h_1 bezüglich der Basis $\overline{AB}$ halbiert diesen Winkel, weil das Dreieck ABM gleichschenklilig ist.

- Die Kantenlänge a kann mit der angegebenen Mantelfläche des Zylinders bestimmt werden (siehe Figur 3).

Es gilt: $2,5a = 2\pi \cdot r$

Mit $r = 3,5 \text{ cm}$ folgt: $2,5a = 22,0 \quad | :2,5$

$$\Leftrightarrow \underline{a = 8,8 \text{ cm}}$$

- Für die Höhe h_1 gilt im markierten Dreieck von Figur 1:

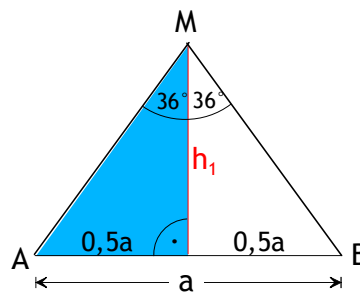
$$\tan 36^\circ = \frac{0,5a}{h_1} \quad \text{Mit } a = 8,8 \text{ cm erhält man:}$$

$$\tan 36^\circ = \frac{4,4}{h_1} \quad | \cdot h_1 \quad | : \tan 36^\circ$$

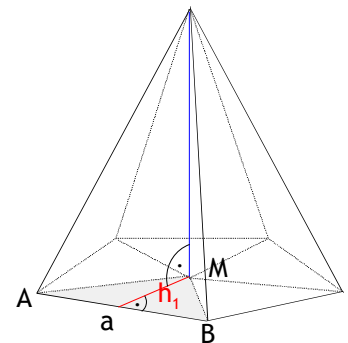
$$\Leftrightarrow h_1 = \frac{4,4}{\tan 36^\circ} = \underline{6,06 \text{ cm}}$$

Mit $a = 8,8 \text{ cm}$ und $h_1 = 6,06 \text{ cm}$ erhält man für $G = \frac{5}{2} a \cdot h_1$:

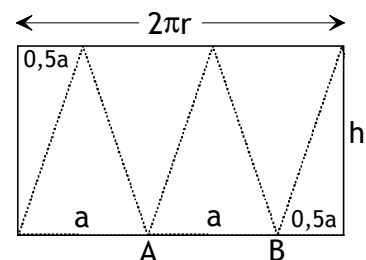
$$\underline{G = 133,32 \text{ cm}^2}$$



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Hinweis: Die beiden rechtwinkligen Dreiecke links und rechts ergeben zusammen das fünfte Seitendreieck des Pyramidenmantels.

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W2



→ Berechnung der Pyramidenhöhe h_{Pyr} :

Die Pyramidenhöhe h_{Pyr} kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 4). Es gilt:

$$h_s^2 = h_1^2 + h_{\text{Pyr}}^2$$

Die Höhe h_1 wurde bereits oben berechnet: $h_1 = 6,06 \text{ cm}$

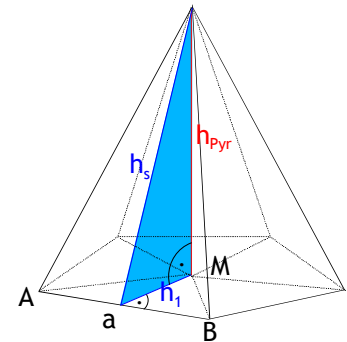
Die Höhe h_s kann in der abgerollten Mantelfläche des Zylinders abgelesen werden (siehe Figur 5). Es ist: $h_s = h = 12,0 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} \text{Damit erhält man: } 12,0^2 &= 6,06^2 + h_{\text{Pyr}}^2 \\ \Leftrightarrow 144 &= 36,72 + h_{\text{Pyr}}^2 \quad | -36,72 \\ \Leftrightarrow 107,28 &= h_{\text{Pyr}}^2 \quad | \sqrt{} \\ \Rightarrow 10,36 &= h_{\text{Pyr}} \text{ bzw. } \underline{h_{\text{Pyr}} = 10,36 \text{ cm}} \end{aligned}$$

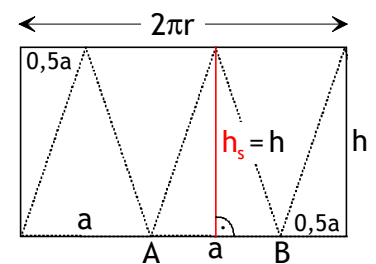
Mit $G = 133,32 \text{ cm}^2$ und $h_{\text{Pyr}} = 10,36 \text{ cm}$ erhält man schließlich für das

$$\text{Pyramidenvolumen } V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} G \cdot h_{\text{Pyr}}: \quad \underline{V_{\text{Pyr}} = 460,4 \text{ cm}^3}$$

Ergebnis: Das Volumen der fünfseitigen Pyramide ist $V_{\text{Pyr}} = 460,4 \text{ cm}^3$.



Figur 4



Figur 5

Aufgabe W2b:

Lösungsübersicht:

Für den Umfang u des Trapezes ABCD gilt: $u = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$.

Mit $\overline{AD} = a = 10 \text{ cm}$ und $\overline{CD} = \overline{AB}$ folgt: $u = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + 10 = 2\overline{AB} + \overline{BC} + 10$ (Angaben in cm)

- Die **Strecke $\overline{AB}$** kann in einer Hälfte des gleichschenkligen Dreiecks ABS berechnet werden, wenn man die Strecke $s = \overline{AS}$ und den Winkel γ kennt (siehe Figur 1). Die Strecke s und der Winkel γ können mit der Höhe h_s und der Strecke $a = 10,0 \text{ cm}$ in einem Seitendreieck der Pyramide berechnet werden (siehe Figur 2). Die Höhe h_s lässt sich aus der angegebenen Oberfläche $O_{\text{Pyr}} = 357 \text{ cm}^2$ der quadratischen Pyramide mit der entsprechenden Formel berechnen.

- Die **Strecke $\overline{BC}$** kann mit dem zweiten Strahlensatz und den nun bekannten Strecken $a = 10 \text{ cm}$, $\overline{AS}$ und $\overline{BS} = \overline{AB}$ bestimmt werden (siehe Figur 3). Alternativ dazu kann $\overline{BC}$ auch in dem gleichschenkligen Trapez der Figur 4 berechnet werden. Diese Berechnung ist aber etwas aufwändiger.

Berechnung des Umfangs des Trapezes ABCD:

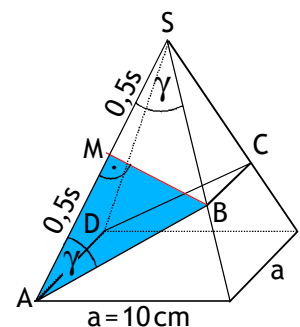
Für den Umfang u des gleichschenkligen Trapezes ABCD gilt: $u = 2\overline{AB} + \overline{BC} + 10$

→ Berechnung der Strecke $\overline{AB}$:

Die Strecke $\overline{AB}$ kann im Dreieck ABM berechnet werden, wenn man die Strecke $s = \overline{AS}$ und den Winkel γ kennt (siehe Figur 1).

Man beachte, dass die Strecke $\overline{BM}$ die Strecke $s = \overline{AS}$ halbiert und dass der Winkel γ im gleichschenkligen Dreieck ABS als Basiswinkel zwei Mal

vorkommt. Im Dreieck ABM gilt: $\cos \gamma = \frac{0,5s}{\overline{AB}}$



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W2



- Der Winkel γ kann im markierten Dreieck der Figur 2 berechnet werden, wenn man die Höhe h_s kennt. Mit $a = 10$ und $0,5a = 5$ gilt:

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{5}{h_s}$$

Die Höhe h_s wiederum kann man durch Einsetzen von $O_{\text{Pyr}} = 357 \text{ cm}^2$ und $a = 10 \text{ cm}$ in die Oberflächenformel $O_{\text{Pyr}} = a^2 + 2a \cdot h_s$ berechnen:

$$357 = 100 + 20 \cdot h_s \quad | -100$$

$$\Leftrightarrow 257 = 20 \cdot h_s \quad | :20$$

$$\Leftrightarrow 12,85 = h_s \text{ bzw. } \underline{h_s = 12,85 \text{ cm}}$$

$$\text{Damit folgt: } \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{5}{12,85} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 21,26^\circ \Leftrightarrow \underline{\gamma = 42,52^\circ}$$

- Für die Strecke $s = \overline{AS}$ erhält man mit $\frac{\gamma}{2} = 21,26^\circ$ (siehe Figur 2):

$$\sin(21,26^\circ) = \frac{5}{s} \quad | \cdot s \quad | : \sin(21,26^\circ)$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{5}{\sin(21,26^\circ)} \text{ bzw. } \underline{s = 13,79 \text{ cm}}$$

Einsetzen von $\gamma = 42,52^\circ$ und $s = 13,79 \text{ cm}$ in $\cos \gamma = \frac{0,5s}{\overline{AB}}$ ergibt:

$$\cos(42,52^\circ) = \frac{6,895}{\overline{AB}} \quad | \cdot \overline{AB} \quad | : \cos(42,52^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{6,895}{\cos(42,52^\circ)} \text{ bzw. } \underline{\overline{AB} = 9,35 \text{ cm}}$$

→ Berechnung der Strecke $\overline{BC}$:

Die Strecke $\overline{BC}$ kann nun mit dem zweiten Strahlensatz in der

markierten Fläche von Figur 3 berechnet werden. Es gilt: $\frac{10}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ES}}{9,35}$

$$\text{Mit } \overline{ES} = s = 13,79 \text{ folgt: } \frac{10}{\overline{BC}} = \frac{13,79}{9,35} \quad | \cdot \overline{BC} \quad | \cdot 9,35$$

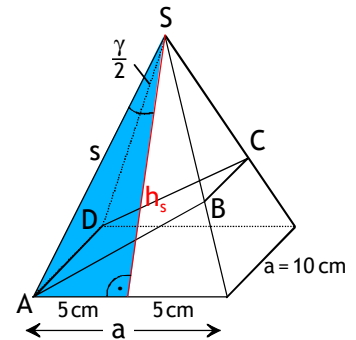
$$\Leftrightarrow 93,5 = 13,79 \cdot \overline{BC} \quad | :13,79$$

$$\Leftrightarrow 6,78 = \overline{BC} \text{ bzw. } \underline{\overline{BC} = 6,78 \text{ cm}}$$

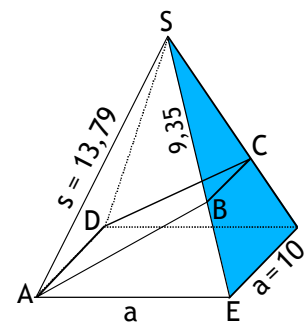
Hinweis: Die Strecke $\overline{BC}$ kann alternativ auch im gleichschenkligen Trapez EFCB der Figur 4 berechnet werden (siehe Seite 17).

Mit $\overline{AB} = 9,35 \text{ cm}$ und $\overline{BC} = 6,78 \text{ cm}$ erhält man schließlich für den Umfang $u = 2\overline{AB} + \overline{BC} + 10$ des Trapezes ABCD: $\underline{u = 35,48 \text{ cm}}$

Ergebnis: Der Umfang des Trapezes ABCD ist $\underline{u = 35,48 \text{ cm}}$.



Figur 2



Figur 3

$\overline{BC}$ ist parallel zu a .

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W2



Alternative Berechnung der Strecke $\overline{BC}$:

Für die Strecke $\overline{BC}$ gilt im gleichschenkligen Trapez EFCB (siehe Figur 4): $\overline{BC} = 10 - 2x$

Für die Strecke x gilt: $\cos \varepsilon = \frac{x}{BE}$

- Für $\overline{BE}$ gilt: $\overline{BE} = \overline{ES} - 9,35$.

Mit $\overline{ES} = s = 13,79 \text{ cm}$ folgt: $\overline{BE} = 4,44 \text{ cm}$

- Den Winkel ε erhält man mit der Summe der Innenwinkel im gleichschenkligen Dreieck EFS. Es gilt: $2\varepsilon + \gamma = 180^\circ$

Mit $\gamma = 42,52^\circ$ (siehe oben) folgt:

$$2\varepsilon + 42,52^\circ = 180^\circ \quad | -42,52^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2\varepsilon = 137,48^\circ \quad | :2$$

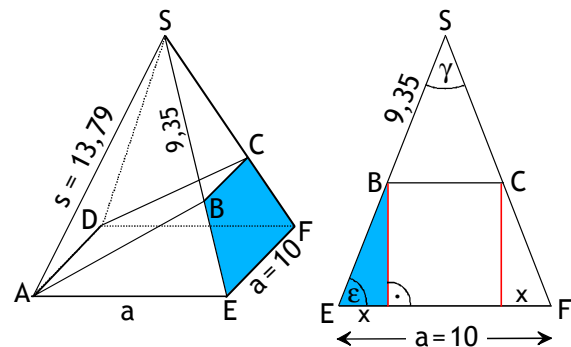
$$\Leftrightarrow \varepsilon = 68,74^\circ$$

Einsetzen von $\overline{BE} = 4,44 \text{ cm}$ und $\varepsilon = 68,74^\circ$ in $\cos \varepsilon = \frac{x}{BE}$ ergibt:

$$\cos(68,74^\circ) = \frac{x}{4,44} \quad | \cdot 4,44$$

$$\Leftrightarrow 1,61 = x \text{ bzw. } x = 1,61 \text{ cm}$$

Für $\overline{BC} = 10 - 2x$ folgt damit schließlich: $\overline{BC} = 6,78 \text{ cm}$



Figur 4



Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W3

Aufgabe W3a:

Lösungsübersicht:

- Um die **Graphen den drei Gleichungen zuordnen** zu können, muss man anhand der Gleichungen von (A) und (B) die Koordinaten der entsprechenden Scheitelpunkte bestimmen. Für die dritte Parabel bleibt dann nur noch die Gleichung (C) übrig.
- Die **Funktionsgleichungen von (A) und (C)** können vervollständigt werden, indem man jeweils die Koordinaten eines Punktes der zugehörigen Parabel am Schaubild abliest und in die unvollständige Funktionsgleichung einsetzt (für x und y).
- Um die **Funktionsgleichung von g** zu bestimmen, muss man die Koordinaten der Scheitelpunkte der Parabeln p_2 und p_3 jeweils in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ einsetzen (für x und y) und das entsprechende Gleichungssystem nach m und b lösen.
- Wenn **S_1 auf g** liegen soll, muss durch Einsetzen der Koordinaten des Scheitelpunkts S_1 von p_1 in die Gleichung von g eine wahre Aussage entstehen. Die Koordinaten des Scheitelpunkts S_1 können mit einer quadratischen Ergänzung der entsprechenden Funktionsgleichung bestimmt werden.

Zuordnung der Graphen zu den drei Funktionsgleichung:

Für die Zuordnung der Graphen benötigt man die Koordinaten der Scheitelpunkte der drei Funktionsgleichungen.

→ Aus Gleichung (A): $y = ax^2 - 1$ ergibt sich sofort: $S_A(0|-1)$

Da es nur eine Parabel mit diesem Scheitelpunkt gibt, muss die Parabel p_3 zur Gleichung (A) gehören.

→ Den Scheitelpunkt von Gleichung (B): $y = x^2 - 6x + 5$ erhält man, indem man die Funktionsgleichung $y = x^2 - 6x + 5$ mithilfe einer quadratischen Ergänzung in ihre Scheitelform umwandelt:

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 - 6x + 5 \\
 \Leftrightarrow y &= x^2 - 6x + \mathbf{3^2} + 5 - \mathbf{3^2} \quad | \text{Anwenden der zweiten binomischen Formel} \\
 \Leftrightarrow y &= (x - 3)^2 + 5 - 9 \\
 \Leftrightarrow y &= (x - 3)^2 - 4
 \end{aligned}$$

Damit ist der Scheitelpunkt der Parabel zu Gleichung (B): $S_B(3|-4)$

Dafür kommt nur die Parabel p_2 in Frage.

→ Für die Gleichung (C): $y = x^2 + 4x + c$ bleibt somit nur noch die Parabel p_1 übrig.

Ergebnis: Die Gleichung (A) gehört zur Parabel p_3 .

Die Gleichung (B) gehört zur Parabel p_2 .

Die Gleichung (C) gehört zur Parabel p_1 .

Vervollständigung der Funktionsgleichungen (A) und (C):

- Den fehlenden a-Wert in (A): $y = ax^2 - 1$ kann man berechnen, indem man die Koordinaten eines Punktes von p_3 in die Funktionsgleichung einsetzt. Einen solchen Punkt kann man im Schaubild ablesen. (Hinweis: Den Punkt $S_3(0|-1)$ darf man allerdings nicht nehmen, weil man sonst die Gleichung $-1 = 0 - 1$ erhält.)

Mit dem Punkt **A(2|0)** erhält man: $\mathbf{0} = a \cdot \mathbf{2^2} - 1$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow 0 &= a \cdot 4 - 1 \quad | +1 \\
 \Leftrightarrow 1 &= 4a \quad | :4 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{4} &= a \quad \text{bzw. } a = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W3



- Den fehlenden c-Wert in (C): $y = x^2 + 4x + c$ kann man berechnen, indem man die Koordinaten eines Punktes von p_1 in die Funktionsgleichung einsetzt; zum Beispiel $B(0|5)$ (siehe Schaubild von p_1).

Mit dem Punkt $B(0|5)$ erhält man: $5 = 0^2 + 4 \cdot 0 + c$

$$\Leftrightarrow 5 = c \text{ bzw. } c = 5$$

Ergebnis: Die vollständigen Funktionsgleichungen von (A) und (C) sind:

(A): $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und (C): $y = x^2 + 4x + 5$

Berechnung der Gleichung der Geraden g durch die Scheitelpunkte S_2 und S_3 :

Die Koordinaten der beiden Scheitelpunkte S_2 und S_3 , durch die g verlaufen soll, wurden bereits oben bestimmt: $S_2 = S_B(3|-4)$ und $S_3 = S_A(0|-1)$.

Durch jeweiliges Einsetzen der Koordinaten von $S_2(3|-4)$ und $S_3(0|-1)$ in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ erhält man:

Mit $S_2(3|-4)$: $-4 = m \cdot 3 + c \Leftrightarrow -4 = 3m + c$ (I)

Mit $S_3(0|-1)$: $-1 = m \cdot 0 + c \Leftrightarrow -1 = c$ bzw. $c = -1$ (II)

Einsetzen von $c = -1$ in Gleichung (I) ergibt: $-4 = 3m + (-1)$

$$\Leftrightarrow -4 = 3m - 1 \quad | +1$$

$$\Leftrightarrow -3 = 3m \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow -1 = m \text{ bzw. } m = -1$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Geraden g lautet $y = -1x - 1$ bzw. $y = -x - 1$.

Nachweis, dass auch $S_1 = S_C$ auf der Geraden g liegt:

Zunächst muss der Scheitelpunkt der Parabel p_1 : $y = x^2 + 4x + 5$ bestimmt werden. Dazu muss mit einer quadratischen Ergänzung die Gleichung $y = x^2 + 4x + 5$ in ihre Scheitelform umgewandelt werden:

$$y = x^2 + 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 4x + 2^2 + 5 - 2^2 \quad | \text{ Anwenden der ersten binomischen Formel}$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 2)^2 + 5 - 4$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 2)^2 + 1$$

Damit ist der Scheitelpunkt der Parabel p_1 : $S_1(-2|1)$

Punktprobe: Durch Einsetzen der Koordinaten von $S_1(-2|1)$ in g: $y = -x - 1$ erhält man:

$$1 = -(-2) - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1$$

Das ist eine wahre Aussage. Also liegt auch $S_1(-2|1)$ auf der Geraden g; was zu zeigen war.

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W3



Aufgabe W3b:

Lösungsübersicht:

- Die Gerade **h** ist eine Ursprungsgerade mit der allgemeinen Gleichung $y = m \cdot x$.
Zur Bestimmung der Steigung m muss man die Koordinaten des Punktes **R** in $y = m \cdot x$ einsetzen.
Um die Koordinaten von **R** zu berechnen, muss man die Gleichungen von p_1 und p_2 gleichsetzen. Die Funktionsgleichung der Parabel p_2 erhält man, indem man die Koordinaten des angegebenen Scheitelpunkts $S_2(1,5 | -3,25)$ in die allgemeine Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ einsetzt (siehe Formelsammlung).
- Zunächst sollte man das **Dreieck RN_1N_2** aus **R** und den beiden Schnittpunkten N_1 und N_2 von p_1 mit der x -Achse in ein Koordinatensystem einzeichnen. Daran können die Längen der Grundseite und der Höhe dieses Dreiecks abgelesen werden, womit dann der Flächeninhalt berechnet werden kann. Die Schnittpunkte von p_1 mit der x -Achse erhält man, indem man in der Funktionsgleichung von p_1 für $y = 0$ setzt und die resultierende Gleichung nach x auflöst.
- Um **Bastians Behauptung** zu überprüfen, sollte man die Gerade **h** in das Koordinatensystem mit dem Dreieck RN_1N_2 einzeichnen. Daran lassen sich dann die Grundseite und die Höhe eines der beiden Teile des Dreiecks RN_1N_2 bestimmen und daraus dessen Flächeninhalt berechnen.

Die Funktionsgleichung der Geraden **h**:

Die Gerade **h** ist eine Ursprungsgerade mit der allgemeinen Gleichung $y = m \cdot x$. Den Wert der Steigung m kann man berechnen, indem man die Koordinaten des Punktes **R** in diese Gleichung einsetzt.

→ Berechnung der Koordinaten von **R**:

Um die Koordinaten von **R** zu berechnen, muss man die Gleichungen von $p_1: y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ und p_2 gleichsetzen. Die Funktionsgleichung der Parabel p_2 erhält man, indem man die Koordinaten des angegebenen Scheitelpunkts $S_2(1,5 | -3,25)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ einsetzt (siehe Formelsammlung). Man erhält:

$$\Leftrightarrow y = (x - 1,5)^2 + (-3,25) \quad | \text{Auflösen der Quadratklammer mit der 2. binomischen Formel}$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 3x + 2,25 - 3,25$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 3x - 1$$

Gleichsetzen von $p_2: y = x^2 - 3x - 1$ mit $p_1: y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ ergibt:

$$x^2 - 3x - 1 = \frac{1}{4}x^2 - 4 \quad | -\frac{1}{4}x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 = 0 \quad | : \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

Mit der b,c -Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$$x_1 = -(-2) + \sqrt{2^2 - 4} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -(-2) - \sqrt{2^2 - 4} = 2$$

Es gibt also nur *einen* Schnittpunkt mit der x -Koordinate $x = 2$. Die y -Koordinate von **R(2 | y)** erhält man durch Einsetzen von $x = 2$ in eine der beiden Gleichungen von p_1 oder p_2 . Einsetzen in $p_2: y = x^2 - 3x - 1$ ergibt: $y = 2^2 - 3 \cdot 2 - 1 = -3$

Der Punkt **R** hat also die Koordinaten **R(2 | -3)**.

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W3



Einsetzen der Koordinaten von $R(2|-3)$ in die Gleichung einer Ursprungsgerade $y = m \cdot x$ ergibt:

$$-3 = m \cdot 2 \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} = m \text{ bzw. } m = -\frac{3}{2} = -1,5$$

Ergebnis: Die Gerade h hat die Gleichung $y = -\frac{3}{2} \cdot x$ bzw. $y = -1,5 \cdot x$

Der Flächeninhalt des Dreiecks RN_1N_2 :

Zunächst müssen die beiden Schnittpunkte N_1 und N_2 von $p_1: y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ mit der x -Achse bestimmt werden, damit man das Dreieck RN_1N_2 in ein Koordinatensystem einzeichnen kann.

Einsetzen von $y = 0$ ergibt: $0 = \frac{1}{4}x^2 - 4 \quad | +4$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{1}{4}x^2 \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow 16 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 \quad | \pm \sqrt{}$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 \text{ und } x_2 = -4$$

Die beiden Schnittpunkte von p_1 mit der x -Achse sind also: $N_1(4|0)$ und $N_2(-4|0)$.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks RN_1N_2 gilt: $A = \frac{1}{2} g \cdot h_0$

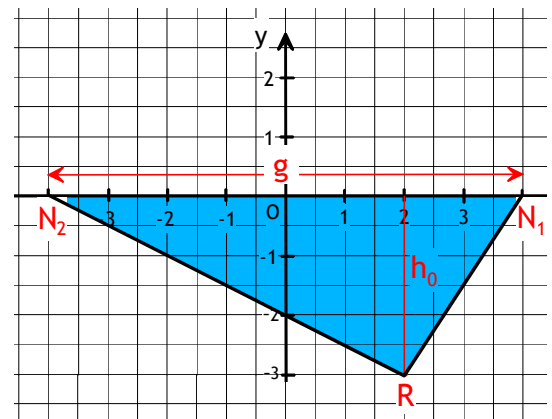
Die Längen von g und h_0 können in der Zeichnung abgelesen werden (siehe Figur 1):

$g = 8 \text{ LE}$ und $h_0 = 3 \text{ LE}$ (LE = Längeneinheiten)

Damit folgt: $A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12 \text{ FE}$ (FE = Flächeneinheiten)

Ergebnis:

Der Flächeninhalt des Dreiecks RN_1N_2 ist $A = 12 \text{ FE}$.



Figur 1

Überprüfung von Bastians Behauptung:

Um Bastians Behauptung überprüfen zu können, muss man

zuerst die Gerade $h: y = -\frac{3}{2}x$ in das Koordinatensystem mit

dem Dreieck RN_1N_2 einzeichnen (siehe Figur 2). Für den Flächeninhalt des markierten Dreiecks gilt dann:

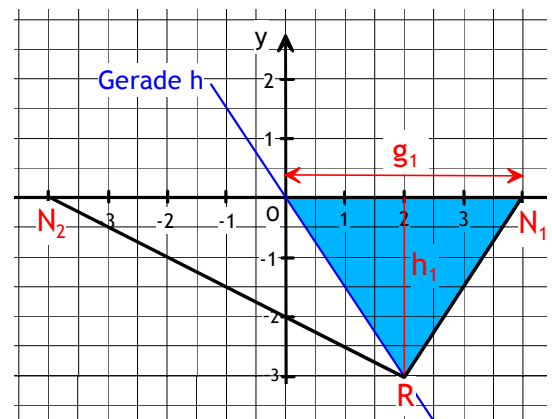
$$A_1 = \frac{1}{2} g_1 \cdot h_1$$

Mit $g_1 = 4 \text{ LE}$ und $h_1 = 3 \text{ LE}$ folgt:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ FE} \text{ (FE = Flächeneinheiten)}$$

Das ist die Hälfte von $A = 12 \text{ FE}$, wie Bastian behauptet hat.

Ergebnis: Bastian hat Recht.



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W4



Aufgabe W4a:

Lösungsübersicht:

- Die Ergebnisse, bei denen **höchstens einmal das Symbol ☺** zu sehen ist, sind $(A; ☺)$, $(☺; A)$ und $(A; A)$ mit der Bezeichnung „A“ = anderes Symbol. Deren Wahrscheinlichkeiten können jeweils mit den Einzelwahrscheinlichkeiten $p(☺)$ und $p(A)$ und der Produktregel berechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „*höchstens einmal das Symbol ☺*“ erhält man dann mit der Summenregel.
- Zur Berechnung des **Erwartungswerts** (siehe Formelsammlung) benötigt man noch die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse $(☺; ☺)$ und $(☺; ☹)$. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „*sonstige*“ braucht nicht berechnet werden, weil bei diesem Ereignis kein Gewinn ausgezahlt wird. Hingegen darf der Einsatz bei der Berechnung des Erwartungswerts nicht vergessen werden.
- Damit das Spiel fair wird, muss man den **neuen Gewinn x des Ereignisses $(☺; ☺)$** so ändern, dass der Erwartungswert 0,00 € beträgt. Diesen Wert x kann man mit der Formel für den Erwartungswert E berechnen, indem man für $E = 0$ einsetzt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens einmal das Symbol ☺ erhält:

Für die Wahrscheinlichkeit $P(\text{höchstens einmal } ☺)$ gilt:

$$P(\text{höchstens einmal } ☺) = P(A; ☺) + P(☺; A) + P(A; A)$$

Darin bedeutet „A“: *Ein anderes Symbol als ☺ erscheint; also ☹ oder ☹.*

Die Einzelwahrscheinlichkeiten können mit den Mittelpunktswinkeln berechnet werden. Es gilt:

$$p(☺) = \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}; \quad p(A) = \frac{300^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{6} \quad (\text{Hinweis zu } p(A): \text{Es ist } 90^\circ + 210^\circ = 300^\circ)$$

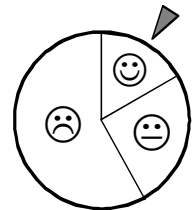
Mit der Produktregel erhält man somit:

$$P(A; ☺) = p(A) \cdot p(☺) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36};$$

$$P(☺; A) = p(☺) \cdot p(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36};$$

$$P(A; A) = p(A) \cdot p(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$$\text{Mit der Summenregel folgt schließlich: } P(\text{höchstens einmal } ☺) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{25}{36} = \frac{35}{36} \approx 97,2 \%$$



Ergebnis:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man höchstens einmal das Symbol ☺ erhält, beträgt $\frac{35}{36} \approx 97,2 \%$.

Hinweis:

Man kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch über das Gegenereignis „*Man erhält zweimal das Symbol ☺.*“ berechnen. Es gilt: $P(\text{höchstens einmal } ☺) = 1 - P(\text{zweimal } ☺)$.

$$\text{Mit } P(☺; ☺) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ folgt: } P(\text{höchstens einmal } ☺) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$



Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W4

Berechnung des Erwartungswerts:

Für den Erwartungswert E aus Sicht eines Spielers gilt (siehe Formelsammlung):

$$E = P(\text{zweimal } \odot) \cdot 4,00 \text{ €} + P(\text{zweimal } \ominus) \cdot 2,00 \text{ €} + P(\text{sonstige}) \cdot 0 \text{ €} + 1 \cdot (-0,50 \text{ €})$$

$$E = P(\text{zweimal } \odot) \cdot 4,00 \text{ €} + P(\text{zweimal } \ominus) \cdot 2,00 \text{ €} - 0,50 \text{ €}$$

Hinweise:

- 1.) Die Wahrscheinlichkeit für den Einsatz ist „1“, da ohne Einsatz erst gar nicht gespielt werden kann.
- 2.) Der Eurobetrag für den Einsatz muss aus Sicht des Spielers negativ gewertet werden.
- 3.) Es ist $P(\text{sonstige}) \cdot 0 \text{ €} = 0 \text{ €}$. Und zur Erinnerung: In einer Summe kann der Summand „0“ weggelassen werden.

Mit der Produktregel und den Einzelwahrscheinlichkeiten $p(\odot) = \frac{1}{6}$ und $p(\ominus) = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$ erhält man:

$$P(\text{zweimal } \odot) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad \text{und} \quad P(\text{zweimal } \ominus) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Damit folgt:

$$E = \frac{1}{36} \cdot 4,00 \text{ €} + \frac{1}{16} \cdot 2,00 \text{ €} - 0,50 \text{ €} = -0,26 \text{ €}$$

Ergebnis: Der Erwartungswert beträgt aus Sicht eines Spielers $E = -0,26 \text{ €}$. Ein Spieler muss also mit einem durchschnittlichen Verlust von 0,26 € pro Spiel rechnen.

Der neue Gewinn für das Ereignis „zweimal $\odot$ “:

Der neue Gewinn für das Ereignis „zweimal $\odot$ “ werde mit x bezeichnet. Dann gilt für den neuen Erwartungswert:

$$E_{\text{neu}} = \frac{1}{36} \cdot x + \frac{1}{16} \cdot 2,00 \text{ €} - 0,50 \text{ €}$$

Weil nun das Spiel fair sein soll, muss $E_{\text{neu}} = 0 \text{ €}$ sein. Damit erhält man die Gleichung:

$$0 \text{ €} = \frac{1}{36} \cdot x + \frac{1}{16} \cdot 2,00 \text{ €} - 0,50 \text{ €}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{36} \cdot x + \frac{2}{16} - 0,50 \quad | \text{ „€“ wurde zur besseren Übersicht weggelassen.}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{36} \cdot x - \frac{3}{8} \quad | \cdot 72 \quad (\text{Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner wird die Gleichung nennerfrei.})$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2 \cdot x - 27 \quad | +27$$

$$\Leftrightarrow 27 = 2 \cdot x \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow 13,5 = x \text{ bzw. } x = 13,50 \text{ €}$$

Ergebnis: Wenn das Spiel fair sein soll, muss der Gewinn für das Ereignis „zweimal $\odot$ “ 13,50 € betragen.

Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W4



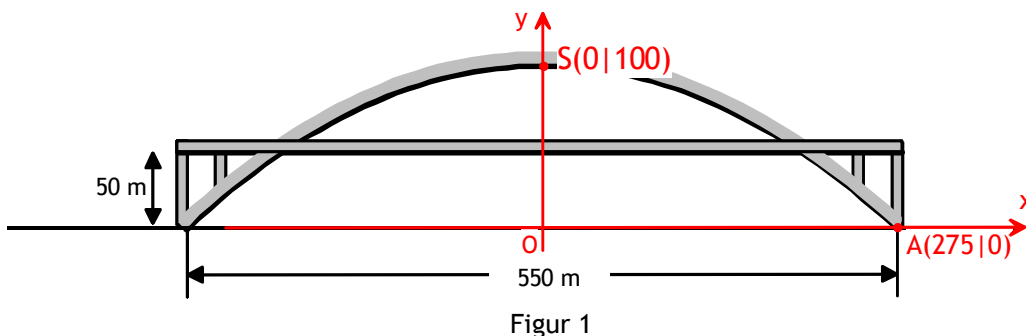
Aufgabe W4b:

Lösungsübersicht:

- Um eine **Funktionsgleichung für den Brückenbogen** aufstellen zu können, muss man zuerst den Brückenbogen in ein Koordinatensystem einzeichnen. Dabei sollte die y-Achse durch den Scheitelpunkt der Brücke gehen, weil man dann die zugehörige Parabelgleichung mit dem Ansatz $y = ax^2 + b$ bestimmen kann (siehe Figur 1). Die x-Achse sollte auf Höhe der Wasseroberfläche liegen. Mit den angegebenen Maßen des Brückenbogens können dann die Werte für a und b bestimmt werden.
- Die **Länge der Fahrbahn innerhalb des Brückenbogens** ist aus Symmetriegründen das Doppelte der x-Koordinate des Punktes Q (siehe Figur 2). Diese x-Koordinate kann berechnet werden, indem man die y-Koordinate von Q in die Funktionsgleichung des Brückenbogens einsetzt. Die y-Koordinate von Q kann an der Zeichnung abgelesen werden.

Berechnung der Funktionsgleichung für den Brückenbogen:

Zunächst muss man den Brückenbogen in ein Koordinatensystem einzeichnen - und zwar so, dass die y-Achse durch den Scheitelpunkt der Parabel geht und die x-Achse auf Höhe der Wasseroberfläche liegt:



Figur 1

Der Brückenbogen kann nun mit der Gleichung $y = ax^2 + b$ beschrieben werden.

- Der Wert für b ist die y-Koordinate des Scheitelpunkts. Da die maximale Höhe der Brücke laut Aufgabenstellung 100 m ($= 2 \cdot 50$ m) beträgt, hat ihr Scheitelpunkt die Koordinaten $S(0|100)$. Somit ist **b = 100**.

- Den Wert für a kann man mit den Koordinaten eines Punktes der Parabel berechnen (siehe Figur 1). Ein solcher Punkt ist beispielsweise **A(275|0)**.

(Hinweis: Da die Brücke auf Höhe der Wasseroberfläche eine Weite von 550 m hat, muss die x-Koordinate von A aus Symmetriegründen $550 : 2 = 275$ sein.)

Einsetzen der Koordinaten von A(275|0) in $y = a \cdot x^2 + 100$ ergibt:

$$0 = a \cdot (275)^2 + 100 \quad | -100$$

$$\Leftrightarrow -100 = a \cdot 75625 \quad | : 75625$$

$$\Leftrightarrow -\frac{100}{75625} = a \quad \text{bzw.} \quad a = -\frac{100}{75625} = -\frac{4}{3025} \approx -0,00132$$

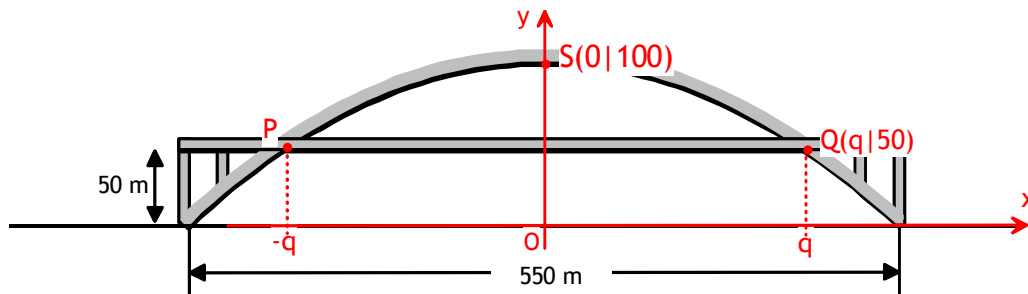
Ergebnis: Eine Funktionsgleichung des Brückenbogens ist $y = -\frac{4}{3025}x^2 + 100$.



Lösungen zur Prüfung 2017: Wahlbereich - Aufgabe W4

Die Länge der Fahrbahn innerhalb des Brückenbogens:

Aus Symmetriegründen ist die Länge l der Fahrbahn innerhalb des Brückenbogens das Zweifache der x -Koordinate des Punktes Q (siehe Figur 2). Es gilt: $l = 2q$



Figur 2

Die y -Koordinate von Q ist die angegebene Höhe der Fahrbahn über der Wasseroberfläche; also $y = 50$ m.

Durch Einsetzen von $y = 50$ in die Parabelgleichung $y = -\frac{4}{3025}x^2 + 100$ kann die x -Koordinate von $Q(q|50)$ berechnet werden. Man erhält:

$$50 = -\frac{4}{3025}x^2 + 100 \quad | -100$$

$$\Leftrightarrow -50 = -\frac{4}{3025}x^2 \quad | :(-\frac{4}{3025})$$

$$\Leftrightarrow 37812,5 = x^2 \quad | \pm \sqrt{}$$

$$\Rightarrow x_1 = 194,45 \text{ und } x_2 = -194,45 \text{ (Hinweis: } x_2 \text{ ist die } x\text{-Koordinate von P.)}$$

Die x -Koordinate von Q ist also $q = 194,45$.

Somit ist die gesuchte Länge $l = 2 \cdot 194,45 \text{ m} = 388,90 \text{ m}$.

Ergebnis: Die Länge der Fahrbahn innerhalb des Brückenbogens beträgt $l = 388,90 \text{ m}$.