Inhalt der Lösungen zur Prüfung 2020:



Pflichtteil 2

Wahlteil – Aufgabe W1a 11
Wahlteil – Aufgabe W1b 13

Wahlteil – Aufgabe W2a 14
Wahlteil – Aufgabe W2b 16

Wahlteil – Aufgabe W3a 18
Wahlteil – Aufgabe W3b 21

Wahlteil – Aufgabe W4a 23
Wahlteil – Aufgabe W4b 25

Wichtige Hinweise zum Copyright:

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und nur für die eigene Nutzung zugelassen. Kopieren und Vervielfältigen der vorliegenden Datei ist verboten! Jede Nutzung in anderen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags.

Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung vervielfältigt oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Ausgenommen von diesen Regelungen ist die **Verwendung für folgende Unterrichtszwecke**:

So dürfen Lehrkräfte die vorliegende Datei zu Unterrichtszwecken ausdrucken, mit elektronischen Projektionsverfahren (wie Laptop und Beamer) einsetzen und OHP-Folien erstellen. Verboten ist allerdings die Weitergabe der Datei auf elektronischen Datenträgern.

Verstöße werden strafrechtlich verfolgt!

© Mathematik-Verlag 2026, Mosbach

Mathematik-Verlag Rainer Hild
Steige 44-2
74821 Mosbach
Internet: https://matheverlag.com
E-Mail: info@matheverlag.com

Lösungen zur Prüfung 2020: Pflichtbereich

Aufgabe P1:

Lösungsübersicht:

Zunächst sollte man die Hilfslinien $\overline{EG}$ und $\overline{FH}$ eintragen, damit die beiden rechtwinkligen Dreiecke EDG und BFH entstehen (siehe Figur 1).

Der Winkel δ_1 kann dann im Dreieck EDG mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man die Strecken $\overline{DG}$ und $\overline{EG}$ kennt.

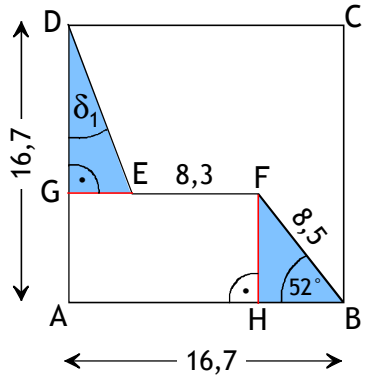
$\rightarrow$ Für die Strecke $\overline{DG}$ gilt: $\overline{DG} = \overline{AD} - \overline{AG}$, mit $\overline{AD} = \overline{AB} = 16{,}7\,\text{cm}$ und $\overline{AG} = \overline{FH}$ (siehe Figur 1). Die Strecke $\overline{FH}$ kann im Dreieck BFH mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).

$\rightarrow$ Für die Strecke $\overline{EG}$ gilt: $\overline{EG} = 16{,}7\,\text{cm} - 8{,}3\,\text{cm} - \overline{BH}$ (siehe Figur 1). Die Strecke $\overline{BH}$ kann im Dreieck BFH mit der Kosinusfunktion berechnet werden.

Tipp: *Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst in den Dreiecken EDG und BFH alle fehlenden Strecken berechnen. Wichtig ist auch zu erkennen, dass $\overline{AD} = \overline{AB} = 16{,}7\,\text{cm}$ gilt, weil ABCD laut Aufgabenstellung ein Quadrat ist.*

Berechnung des Winkels δ_1:

Zunächst sollte man alle angegebenen Längen, den Winkel $\beta_1 = 52^\circ$ und die Hilfslinien $\overline{EG}$ und $\overline{FH}$ in die Zeichnung eintragen, damit die beiden rechtwinkligen Dreiecke EDG und BFH entstehen (siehe Figur 1).



Figur 1

Für den Winkel δ_1 gilt dann im Dreieck EDG: $\tan\delta_1 = \dfrac{\overline{EG}}{\overline{DG}}$

$\rightarrow$ Berechnung der Strecke $\overline{DG}$:

Für die Strecke $\overline{DG}$ gilt (siehe Figur 1):

$\overline{DG} = 16{,}7 - \overline{AG}$, mit $\overline{AG} = \overline{FH}$

Die Strecke $\overline{FH}$ kann im Dreieck BFH mit der Sinusfunktion berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 1):

$$\sin 52^\circ = \frac{\overline{FH}}{8{,}5} \quad | \cdot 8{,}5$$

$\Leftrightarrow 6{,}70 = \overline{FH}$ bzw. $\overline{FH} = 6{,}70\,\text{cm}$

Damit gilt auch: $\overline{AG} = 6{,}70\,\text{cm}$

Einsetzen in $\overline{DG} = 16{,}7 - \overline{AG}$ ergibt: $\overline{DG} = \underline{10{,}0\,\text{cm}}$

$\rightarrow$ Berechnung der Strecke $\overline{EG}$:

Für die Strecke $\overline{EG}$ gilt (siehe Figur 1):

$\overline{EG} = 16{,}7 - 8{,}3 - \overline{BH} = 8{,}4 - \overline{BH}$

Die Strecke $\overline{BH}$ kann im Dreieck BFH mit der Kosinusfunktion berechnet werden. Darin gilt:

Lösungen zur Prüfung 2020: Pflichtbereich

$\cos 52^\circ = \frac{\overline{BH}}{8,5} \quad | \cdot 8,5$

$\Leftrightarrow 5,23 = \overline{BH}$ bzw. $\overline{BH} = 5,23$ cm

Einsetzen in $\overline{EG} = 8,4 - \overline{BH}$ ergibt: $\overline{EG} = \underline{3,17 \text{ cm}}$

Einsetzen von $\overline{DG} = 10,0$ cm und $\overline{EG} = 3,17$ cm in $\tan \delta_1 = \frac{\overline{EG}}{\overline{DG}}$ ergibt schließlich:

$\tan \delta_1 = 0,317 \quad | \tan^{-1}$

$\Rightarrow \mathbf{\delta_1 = 17,6^\circ}$

Ergebnis: Der Winkel δ_1 beträgt $\mathbf{\delta_1 = 17,6^\circ}$.

Aufgabe P2:

Lösungsübersicht:

Für den Umfang des Dreiecks ADC gilt: $u = \overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AC}$

- Die Strecke $\overline{AD}$ kann im Dreieck ABD mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).
- Für die Strecke $\overline{CD}$ gilt: $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD}$. Die Strecke $\overline{BD}$ kann im Dreieck ABD mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1). Um die Strecke $\overline{BC}$ berechnen zu können, muss man noch die Hilfslinie $\overline{BE} = 6,7$ cm einzeichnen (siehe Figur 2). Dann kann $\overline{BC}$ im rechtwinkligen Dreieck BEC mit der Kosinusfunktion und mit $\beta_1 = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$ bestimmt werden (siehe Figur 2).
- Die Strecke $\overline{AC}$ kann schließlich mit den Strecken $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ und dem Satz des Pythagoras im Dreieck ADC berechnet werden.

Tipp: *Bevor Sie losrechnen, sollten Sie alle bekannten Strecken und Winkel in die Zeichnung eintragen; insbesondere die Strecke $\overline{BE} = 6,7$ cm. Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst in den Dreiecken ABD und BEC alle fehlenden Strecken bzw. Winkel berechnen.*

Berechnung des Umfangs u des Dreiecks ADC:

Für den Umfang des Dreiecks ADC gilt: $\mathbf{u = \overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AC}}$

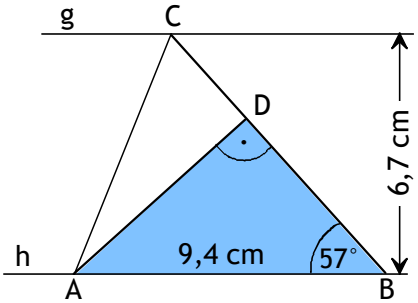
Zunächst sollten alle angegebenen Längen und Winkel in die Zeichnung eingetragen werden.

→ Berechnung der Strecke $\overline{AD}$:

Die Strecke $\overline{AD}$ kann im Dreieck ABD mit der Sinusfunktion berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 1):

$\sin 57^\circ = \frac{\overline{AD}}{9,4} \quad | \cdot 9,4$

$\Leftrightarrow 7,88 = \overline{AD}$ bzw. $\overline{AD} = \underline{7,88 \text{ cm}}$



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2020: Pflichtbereich

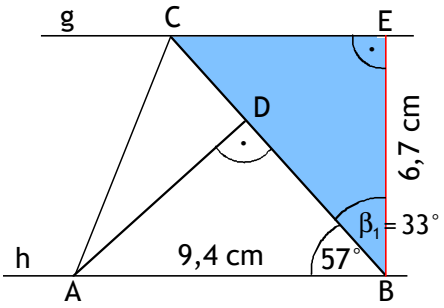
→ Berechnung der Strecke $\overline{CD}$:

Für die Strecke $\overline{CD}$ gilt (siehe Figur 2): $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD}$

• Für die Strecke $\overline{BD}$ gilt im Dreieck ABD (siehe Figur 2).

$$\cos 57^\circ = \frac{\overline{BD}}{9{,}4} \quad | \cdot 9{,}4$$

$$\Leftrightarrow 5{,}12 = \overline{BD} \quad \text{bzw.} \quad \overline{BD} = \underline{5{,}12 \text{ cm}}$$



Figur 2

• Um die Strecke $\overline{BC}$ berechnen zu können, muss man noch die Hilfslinie $\overline{BE} = d = 6{,}7\,\text{cm}$ einzeichnen (siehe Figur 2).
Mit $\beta_1 = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$ gilt im Dreieck BEC:

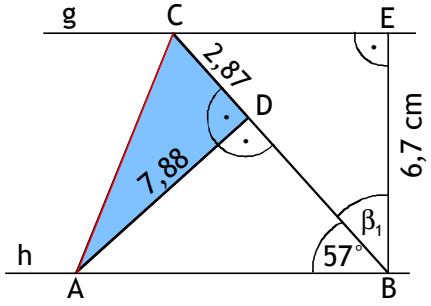
$$\cos 33^\circ = \frac{6{,}7}{\overline{BC}} \quad | \cdot \overline{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} \cdot \cos 33^\circ = 6{,}7 \quad | : \cos 33^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \underline{7{,}99 \text{ cm}}$$

Für $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD}$ folgt damit:

$$\overline{CD} = 7{,}99 - 5{,}12 = \underline{2{,}87 \text{ cm}}$$



Figur 3

→ Berechnung der Strecke $\overline{AC}$:

Die Strecke $\overline{AC}$ kann nun mit dem Satz des Pythagoras und den Strecken $\overline{AD} = 7{,}88\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = 2{,}87\,\text{cm}$ im Dreieck ADC berechnet werden. Es gilt (siehe Figur 3):

$$\overline{AC}^2 = 7{,}88^2 + 2{,}87^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 70{,}33 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \underline{8{,}39 \text{ cm}}$$

Mit $\overline{AD} = 7{,}88\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 2{,}87\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 8{,}39\,\text{cm}$ folgt schließlich für den Umfang u des Dreiecks ADC:

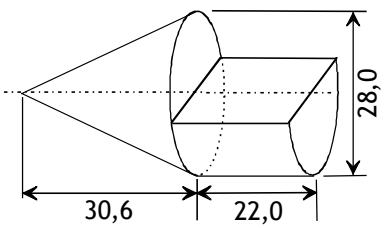
$\mathbf{u} = 7{,}88\,\text{cm} + 2{,}87\,\text{cm} + 8{,}39\,\text{cm} = \mathbf{19{,}14\,cm}$

Ergebnis: Der Umfang des Dreiecks ADC beträgt **u = 19,14 cm**.

Aufgabe P3:

Berechnung des Oberflächeninhalts des zusammengesetzten Körpers:

Die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers besteht aus einem Kegelmantel M_{Kegel}, zwei Halbkreisen, einem Rechteck R und einem halben Zylindermantel M_{Zyl}. Die beiden Halbkreise können zu einem ganzen Kreis K zusammengesetzt werden, weil sie den gleichen Durchmesser d = 28,0 cm haben.
Somit gilt für den Oberflächeninhalt:



$$\mathbf{O_{zus} = M_{Kegel} + K + R + 0{,}5\,M_{Zyl}}$$

Lösungen zur Prüfung 2020: Pflichtbereich

→ Berechnung des Kegelmantels M_{Kegel}:

Für einen Kegelmantel gilt die Formel (siehe Formelsammlung):
$M_{Kegel} = \pi \cdot r \cdot s$

Darin ist r der Radius des Grundkreises. Der Zeichnung entnimmt man: $r = 0{,}5 \cdot 28{,}0\ cm = 14{,}0\ cm$

Die Seitenlinie s des Kegels kann in dem markierten Dreieck der Figur 2 mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Es gilt:
$s^2 = r^2 + h_{Ke}^2$

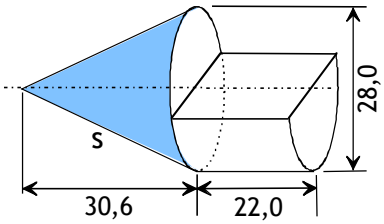
Mit r = 14,0 cm und der Kegelhöhe $h_{Ke} = 30{,}6$ cm erhält man:

$s^2 = 14{,}0^2 + 30{,}6^2$

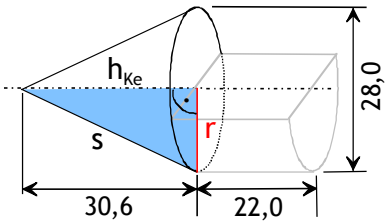
$\Leftrightarrow s^2 = 1132{,}36 \quad | \sqrt{\ }$

$\Rightarrow s = \underline{33{,}65\ cm}$

Mit r = 14,0 cm und s = 33,65 cm folgt: $\mathbf{M_{Kegel} = 1480{,}0\ cm^2}$



Figur 1

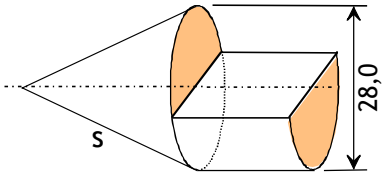


Figur 2

→ Berechnung der zwei Halbkreisflächen:

Beide Halbkreise ergeben zusammen einen Kreis K mit dem Durchmesser d = 28,0 cm bzw. Radius r = 14,0 cm (siehe Figur 3).
Für dessen Flächeninhalt gilt: $K = \pi \cdot r^2$

Mit r = 14,0 cm folgt: $\mathbf{K = 615{,}75\ cm^2}$

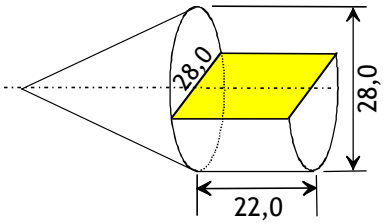


Figur 3

→ Berechnung der Rechteckfläche R:

Das Rechteck hat die Länge l = 22,0 cm und die Breite b = d = 28,0 cm. Man beachte, dass die Breite b des Rechtecks der Durchmesser d der Kreisfläche K ist (siehe Figur 4).

Damit folgt: $\mathbf{R = 22{,}0 \cdot 28{,}0 = 616{,}0\ cm^2}$



Figur 4

→ Berechnung des Zylindermantels M_{Zyl}:

Für einen Zylindermantel gilt (siehe Formelsammlung):
$M_{Zyl} = 2\pi \cdot r \cdot h_{Zyl}$

Mit r = 14,0 cm und $h_{Zyl} = 22{,}0$ cm erhält man: $\mathbf{M_{Zyl} = 1935{,}22\ cm^2}$

Einsetzen von $M_{Kegel} = 1480{,}0\ cm^2$, $K = 615{,}75\ cm^2$, $R = 616{,}0\ cm^2$ und $M_{Zyl} = 1935{,}22\ cm^2$ in $O_{zus} = M_{Kegel} + K + R + 0{,}5\,M_{Zyl}$ ergibt:

$\mathbf{O_{zus} = 1480{,}0\ cm^2 + 615{,}75\ cm^2 + 616\ cm^2 + 0{,}5 \cdot 1935{,}22\ cm^2 = 3679{,}36\ cm^2}$

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers beträgt $\underline{O_{zus} = 3679{,}36\ cm^2}$.

Aufgabe P4:

Die Lösungen der Gleichung:

$(2x + 1)^2 - 3(x + 4) = (x - 1)(2x + 1) + 2$ | erste binomische Formel für die Quadratklammer.

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 3x - 12 = 2x^2 + 1x - 2x - 1 + 2$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 1x - 11 = 2x^2 - 1x + 1 \quad | -2x^2 + 1x - 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \quad | :2$

$\Leftrightarrow x^2 + 1x - 6 = 0$

Lösungen zur Prüfung 2020: Pflichtbereich

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$x_1 = -0{,}5 + \sqrt{(0{,}5)^2 - (-6)} = -0{,}5 + \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 + 2{,}5 = \mathbf{2}$ und

$x_2 = -0{,}5 - \sqrt{(0{,}5)^2 - (-6)} = -0{,}5 - \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 - 2{,}5 = \mathbf{-3}$

Ergebnis: Die Lösungen der Gleichung sind $\mathbf{x_1 = 2}$ und $\mathbf{x_2 = -3}$.

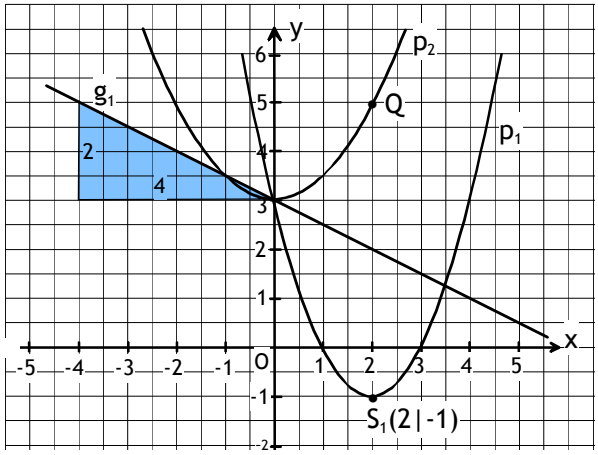
Aufgabe P5:

Zuordnung der Funktionsgleichungen:

• Der **Graph von p_2** ist symmetrisch zur y-Achse. Somit muss dessen Funktionsgleichung die Form $y = ax^2 + c$ haben. Da nur eine der fünf vorgegebenen Funktionsgleichungen diese Form hat, nämlich Gleichung (3), muss die **Gleichung (3) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ zum Graphen von p_2** gehören.

(Hinweis: Anhand des Schaubilds von p_2 erkennt man leicht: c = 3. Den Wert von a könnte man durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes von p_2 in $y = ax^2 + 3$ *berechnen*. Z.B.: Q(2|5).

Welche Gleichungen zu den Graphen g_1 und p_2 gehören, findet man am besten heraus, wenn man anhand ihrer Graphen ihre Funktionsgleichungen aufstellt:



• Die Gerade g_1 hat die allgemeine Gleichung $y = m \cdot x + c$. Den y-Achsenabschnitt c von g_1 kann man im Schaubild ablesen: c = 3. Die Steigung m kann man mithilfe eines Steigungsdreiecks bestimmen (siehe Schaubild rechts).

Darin ist: $m = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Man beachte, dass die Steigung von g_1 negativ ist, weil g_1 von links oben nach rechts unten verläuft.

Somit gehört die **Gleichung (5) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ zur Geraden g_1.**

• Die Gleichung der verschobenen Normalparabel p_1 kann man mithilfe der Koordinaten ihres Scheitelpunkts $S_1(2|-1)$ bestimmen. Einsetzen der Koordinaten von $S_1(\mathbf{2}|\mathbf{-1})$ in die Scheitelform $y = (x - \mathbf{d})^2 + \mathbf{e}$ ergibt:

$y = (x - \mathbf{2})^2 + (\mathbf{-1})$

$\Leftrightarrow \quad y = (x - 2)^2 - 1$ | Auflösen der Quadratklammer mit der 2. binomischen Formel

$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 4x + 4 - 1$

$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 4x + 3$

Somit gehört die Gleichung (4) zur Parabel p_1.

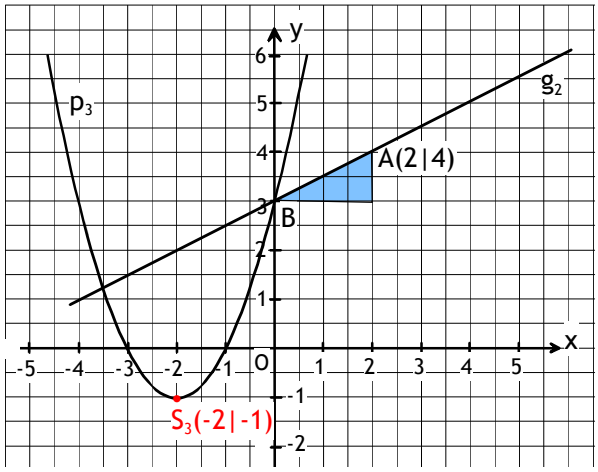
Ergebnis: Gleichung (3) gehört zu p_2 ; Gleichung (5) gehört zu g_1 ; Gleichung (4) zu p_1.

Lösungen zur Prüfung 2020: Pflichtbereich



Die Schaubilder der beiden fehlenden Graphen:

Die beiden fehlenden Funktionsgleichungen sind: (1) $y = \frac{1}{2}x + 3$ und (2) $y = x^2 + 4x + 3$



• Der Graph von (1) $y = \frac{1}{2}x + 3$ ist eine Gerade g_2 mit der Steigung $m = \frac{1}{2}$ und dem y-Achsenabschnitt $c = 3$. Man kann den Graph von (1) zeichnen, indem man von B(0|3) aus ein Steigungsdreieck mit der Breite 2 und der Höhe 1 zeichnet (siehe Schaubild rechts).

Alternativ dazu kann man auch einen weiteren Punkt A von $y = \frac{1}{2}x + 3$ berechnen und die Gerade g_2 durch B(0|3) und A zeichnen. Zum Beispiel ergibt Einsetzen von $x_A = 2$ in $y = \frac{1}{2}x + 3$ den Wert $y_A = 4$ und somit den Punkt A(2|4).

• Der Graph von (2) $y = x^2 + 4x + 3$ ist eine verschobene Normalparabel p_3, die man mithilfe ihres Scheitelpunkts S_3 zeichnen kann. Zur Bestimmung der Koordinaten des Scheitelpunkts muss man die Gleichung $y = x^2 + 4x + 3$ mithilfe einer quadratischen Ergänzung in ihre Scheitelform umformen:

$$y = x^2 + 4x \textcolor{red}{+ 2^2} + 3 \textcolor{red}{- 2^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (x + \textcolor{red}{2})^2 + 3 \textcolor{red}{- 4}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (x + 2)^2 - 1$$

Somit hat die Parabel p_3 den Scheitelpunkt $S_3(-2|-1)$. Anlegen der Parabelschablone an $S_3(-2|-1)$ ergibt den Graphen von p_3 (siehe Schaubild).

Aufgabe P6:

Allgemeine Lösungshinweise:

• Die Wahrscheinlichkeiten, mit dem *ersten* Feld einen Betrag von 0 €, 1 € bzw. 10 € freizurubbeln sind: $P(0\,€) = \frac{8}{16}$; $P(1\,€) = \frac{6}{16}$ und $P(10\,€) = \frac{2}{16}$

• Das Aufrubbeln von 2 Feldern entspricht einem Ziehen aus einem Behälter ohne Zurücklegen, weil man ja das zuerst freigerubbelte Feld nicht noch einmal freirubbeln kann. Somit ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für das zweite freigerubbelte Feld.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Gewinn 10 €“:

Das Ereignis „Gewinn 10 €“ tritt bei zwei Ergebnissen ein:

1.) Zuerst wird ein Feld „0 €“ freigerubbelt und dann ein Feld „10 €“. **Ergebnis (0; 10)**

2.) Zuerst wird ein Feld „10 €“ freigerubbelt und dann ein Feld „0 €“. **Ergebnis (10; 0)**

Mit der Produktregel erhält man: $P(0;10) = \frac{8}{16} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$ und $P(10;0) = \frac{2}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{1}{15}$

Man beachte, dass nach dem ersten freigerubbelten Feld nur noch 15 Felder zur Auswahl stehen !

Mit der Summenregel folgt: $P(\text{Gewinn } 10\,€) = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15} \approx \mathbf{13{,}3\,\%}$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Gewinn 10 €“ beträgt ca. **13,3 %.**

Lösungen zur Prüfung 2020: Pflichtbereich



Die Wahrscheinlichkeit für den Hauptgewinn 20 €:

Das Ereignis „Hauptgewinn 20 €“ tritt dann ein, wenn zwei Felder mit 10 € freigerubbelt werden:

P(20 €) = P(10; 10)

Mit der Produktregel erhält man: $P(10;\,10) = \frac{2}{16} \cdot \frac{1}{15} = \mathbf{\frac{1}{120}} \approx \mathbf{0{,}83\ \%}$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für den Hauptgewinn 20 € beträgt $\mathbf{\frac{1}{120}} \approx$ **0,83 %.**

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Gewinn mehr als 10 €“:

Das Ereignis „Gewinn mehr als 10 €“ tritt bei drei Ergebnissen ein:

1.) Zuerst wird ein Feld „1 €“ freigerubbelt und dann ein Feld „10 €“. **Ausgang (1; 10)**

2.) Zuerst wird ein Feld „10 €“ freigerubbelt und dann ein Feld „1 €“. **Ausgang (10; 1)**

3.) Man rubbelt zweimal 10 € frei. Das ist der **Hauptgewinn** mit $P(20\ €) = \frac{1}{120}$ (siehe oben).

Mit der Produktregel erhält man: $P(1;\,10) = \frac{6}{16} \cdot \frac{2}{15} = \mathbf{\frac{1}{20}}$ und $P(10;\,1) = \frac{2}{16} \cdot \frac{6}{15} = \mathbf{\frac{1}{20}}$

Mit der Summenregel folgt:

$P(\text{Gewinn mehr als } 10\ €) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{120} = \mathbf{\frac{13}{120}} \approx \mathbf{10{,}83\ \%}$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Gewinn mehr als 10 €“ beträgt $\mathbf{\frac{13}{120}} \approx$ **10,83 %.**

Aufgabe P7:

Prozentualer Anstieg der Einweg-Getränkeverpackungen von 2004 bis 2014:

Im Jahr 2004 wurden 465 000 t Einweg-Getränkeverpackungen verbraucht. Das ist der Grundwert G.
Im Jahr 2014 wurden 600 000 t Einweg-Getränkeverpackungen verbraucht. Das ist der erhöhte Grundwert G_+.

Einsetzen von G = 465 000 t und G_+ = 600 000 t in die Formel $G_+ = G \cdot q_+$ ergibt:

$600\,000 = 465\,000 \cdot q_+ \quad | \ :465\,000$

$\Leftrightarrow \quad 1{,}29 = q_+$ bzw. $q_+ = 1{,}29$

Mit $q_+ = 1 + \frac{p}{100}$ folgt: **p % = 29 %**

Ergebnis: Der Verbrauch von Einweg-Getränkeverpackungen ist von 2004 bis 2014 um **29 %** angestiegen.

Der Verbrauch an Getränkeverpackungen insgesamt im Jahr 2014:

Im Jahr 2014 wurden 600 000 t ***Einweg***-Getränkeverpackungen verbraucht. Laut Diagramm waren das 54 % aller verbrauchten Getränkeverpackungen. Daraus kann die Menge *aller* verbrauchten Getränkeverpackungen (= Grundwert G) mit einer Dreisatzrechnung oder mit der Formel $W = G \cdot \frac{p}{100}$ berechnet werden. Mit W = 600 000 t und p % = 54 % erhält man:

$600\,000 = G \cdot 0{,}54 \quad | \ :0{,}54$

$\Leftrightarrow \ 1\,111\,111{,}1 = G$ bzw. **G ≈ 1,1 Mio Tonnen** Getränkeverpackungen

Ergebnis: Insgesamt wurden im Jahr 2014 ca. **1,1 Mio. Tonnen** Getränkeverpackungen verbraucht.

Lösungen zur Prüfung 2020: Pflichtbereich

Die Menge an Einweg-Getränkeverpackungen im Jahr 2024 bei einem jährlichen Rückgang von 5 %:

Bei einer jährlichen Rückgangsrate von 5 % ist der jährliche Verringerungsfaktor $q_- = 0{,}95$. Dies folgt durch Einsetzen von $p = 5$ in die Formel $q_- = 1 - \frac{p}{100}$.

Der Grundwert G ist nun der Verbrauch der Einweg-Getränkeverpackungen im Jahr 2014; also G = 600 000 t. Der gesuchte verringerte Grundwert G_- ist der Verbrauch im Jahr 2024.

Mit der Formel $G_- = G \cdot q_-^{\,n}$ und n = 10 Jahre erhält man: $G_- = 600\,000 \cdot 0{,}95^{10} =$ **359 242 t**

Ergebnis: Wenn der Verbrauch an Einweg-Getränkeverpackungen ab 2014 jährlich um 5 % zurückgeht, würde im Jahr 2024 der Verbrauch an Einweg-Getränkeverpackungen **359 242 Tonnen** betragen.
(Hinweis: Gerundet sind das 360 000 t.)

Aufgabe P8:

Zuordnung des richtigen Boxplots zum Diagramm:

Um das Diagramm dem richtigen Boxplot zuordnen zu können, muss man die Kennwerte der dargestellten Verteilung bestimmen. Dazu benötigt man eine geordnete Urliste (Rangliste) der Wartezeiten der Hotline „QUICK-TEL“.

Rangliste der Wartezeiten der Hotline QUICK-TEL:

5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | **7** | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | **9** | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | **11** | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 15 | 15 | **16**

Hinweise:

1.) Die Höhe eines Balkens im Diagramm gibt an, wie oft man die zugehörige Wartezeit in der Rangliste aufschreiben muss.

2.) Zur besseren Übersicht ist jeder 10.-te Wert grau unterlegt.

Der Zentralwert z befindet sich wegen $\frac{41}{2} = 20{,}5$ am 21. Platz: **z = 9 min**

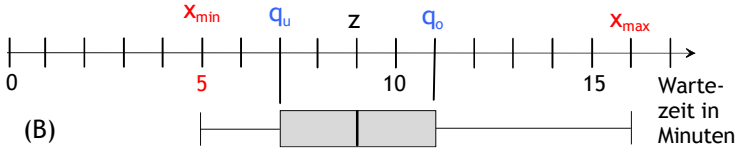
Das untere Quartil q_u befindet sich wegen $\frac{1}{4} \cdot 41 = 10{,}25$ am 11. Platz: **q_u = 7 min**

Das obere Quartil q_o befindet sich wegen $\frac{3}{4} \cdot 41 = 30{,}75$ am 31. Platz: **q_o = 11 min**

Extremwerte:

x_{min} = 5 min und **x_{max} = 16 min**.

Alle Kennwerte der Rangliste der Hotline QUICK-TEL stimmen mit den Kennwerten des Boxplots (B) überein.



Ergebnis: Die Verteilung der Wartezeiten der Hotline QUICK-TEL wird durch **Boxplot (B)** dargestellt.

Lösungen zur Prüfung 2020: Pflichtbereich

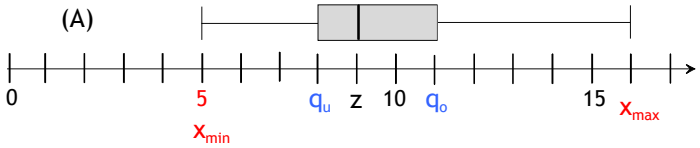


Mögliche Werte für die drei leeren Felder der Strichliste:

Um die drei leeren Felder der Strichliste mit möglichen Werten zu vervollständigen, muss man zunächst am Boxplot A die charakteristischen Kennwerte ablesen.
Man erhält:

x_{min} = 5 min und x_{max} = 16 min ;

z = 9 min ; q_u = 8 min und q_o = 11 min.



Um die Strichliste mit möglichen Werten zu ergänzen, muss man nun eine mögliche Rangliste aufstellen, die die gleichen Kennwerte wie Boxplot (A) hat. Dabei muss man beachten:

- Der Zentralwert **z = 9 min** muss sich wegen $\frac{41}{2}$ = 20,5 am **21. Platz** der Rangliste befinden.
- Das untere Quartil q_u = 8 min muss sich wegen $\frac{1}{4} \cdot 41$ = 10,25 am **11. Platz** der Rangliste befinden.
- Das obere Quartil q_o = 11 min muss sich wegen $\frac{3}{4} \cdot 41$ = 30,75 am **31. Platz** der Rangliste befinden.

Die beiden Extremwerte des Boxplots (A) stimmen bereits mit den Werten der Strichliste überein.

Unvollständige Rangliste der Wartezeiten der Hotline FAST-PHONE:

5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | | q_u | | | | | | | | 9 | **z** | | | | | | |
| | 11 | q_o | | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 14 | 15 | 15 | 16

Hinweise:
1.) Zur besseren Übersicht ist jeder 10.-te Wert grau unterlegt.
2.) Die fünf Werte „10 min“ der Strichliste können erst dann eingetragen werden, wenn man die Anzahl der Werte für „8 min“ und „9 min“ festgelegt hat.

Wenn man die Werte für q_u= 8 min, **z = 9 min** und q_o = 11 min an den oben erwähnten Plätzen einträgt, erhält man:

5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | | 8 | | | | | | | | 9 | **9** | | | | | | |
| | 11 | 11 | | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 14 | 15 | 15 | 16

In dieser unvollständigen Rangliste ***muss*** außerdem am 10. Platz der Wert „8“ stehen und am 32. Platz der Wert „11“, weil die Werte der Größe nach geordnet sein müssen. Zwischen dem Wert „9“ und dem Wert „11“ muss man dann noch die fünf Werte „10“ aus der Strichliste eintragen. Mit wie vielen 8ern oder 9ern man die Plätze 12 bis 20 zwischen „**8**“ und „**9**“ auffüllt, ist willkürlich. Eine mögliche Rangliste sieht also so aus:

5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | **9** | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 |
10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 13 | 14 | 15 | 15 | 16

Die zugehörige Strichliste ist:

Minuten	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Anzahl der Anrufer	||	||||	|||	𝍸 |||	𝍸 |||	𝍸	||	||||	|	|	||	|

Mögliche weitere Werte unter Einhaltung der obigen Kennwerte:

8 min: mindestens 2 Striche und maximal 11 Striche

9 min: mindestens 1 Strich und maximal 14 Striche

11 min: mindestens 2 Striche und maximal 6 Striche

Die Summe aller ergänzten Striche muss 18 Striche ergeben.

© Mathematik-Verlag, https://matheverlag.com

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W1

Aufgabe W1a:

Lösungsübersicht:

Das Viereck ABCE ist ein Trapez mit dem Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CE}) \cdot h$ (siehe Figur 2).

- Die Strecke $\overline{CE}$ kann im Dreieck ECD mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).
- Zur Berechnung der Trapezhöhe h muss man zuerst den Abstand zwischen D und der Seite $\overline{AB}$ einzeichnen. Für h gilt dann (siehe Figur 2): $h = 12{,}9\text{ cm} - \overline{DF}$. Die Strecke $\overline{DF}$ kann im Dreieck FCD mit der Sinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel γ_1 kennt, der mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ECD bestimmt werden kann (siehe Figur 2).
- Zur Berechnung der Strecke $\overline{AB}$ muss man die Hilfslinie $\overline{BG} = h$ einzeichnen (siehe Figur 3).

Dann gilt: $\overline{AB} = \overline{CE} - \overline{CG}$. Die Strecke $\overline{CE}$ wurde bereits im Dreieck ECD berechnet. Die Strecke $\overline{CG}$ kann im Dreieck BCG mit der Höhe $h = \overline{BG}$ und der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel γ_2 kennt (siehe Figur 3). Dieser Winkel ergibt sich aus $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 95^\circ$ und dem Winkel γ_1 im Dreieck ECD.

Tipp: *Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zunächst die Strecke $\overline{ED}$ und den fehlenden Innenwinkel γ_1 im Dreieck ECD berechnen. Außerdem sollten Sie die Höhe h des Trapezes ABCE und den Abstand von D zu $\overline{AB}$ einzeichnen.*

Berechnung des Flächeninhalts des Vierecks ABCE:

Das Viereck ABCE ist ein Trapez mit dem Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CE}) \cdot h$ (siehe Figur 2).

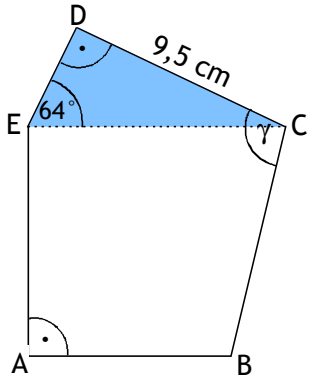
→ Berechnung der Strecke $\overline{CE}$:

Im Dreieck ECD gilt (siehe Figur 1):

$$\sin 64^\circ = \frac{9{,}5}{\overline{CE}} \quad | \cdot \overline{CE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CE} \cdot \sin 64^\circ = 9{,}5 \quad | : \sin 64^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{CE} = 10{,}57\text{ cm}$$



Figur 1

→ Berechnung der Trapezhöhe h:

Für die Trapezhöhe h gilt (siehe Figur 2): $h = 12{,}9\,\text{cm} - \overline{DF}$

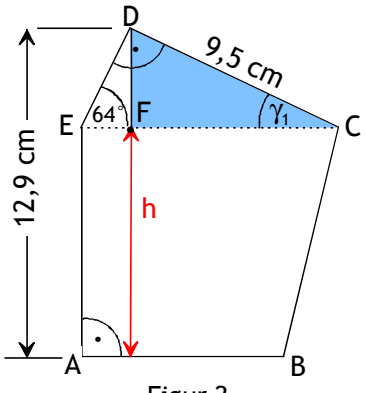
Für die Strecke $\overline{DF}$ gilt im Dreieck FCD: $\sin \gamma_1 = \frac{\overline{DF}}{9{,}5}$

Den Winkel γ_1 erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ECD. Darin gilt: $64^\circ + 90^\circ + \gamma_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \gamma_1 = 26^\circ$

Damit folgt: $\sin 26^\circ = \frac{\overline{DF}}{9{,}5} \quad | \cdot 9{,}5$

$$\Leftrightarrow 4{,}16 = \overline{DF} \text{ bzw. } \overline{DF} = 4{,}16\text{ cm}$$

Einsetzen in $h = 12{,}9\,\text{cm} - \overline{DF}$ ergibt: $h = 8{,}74$ cm

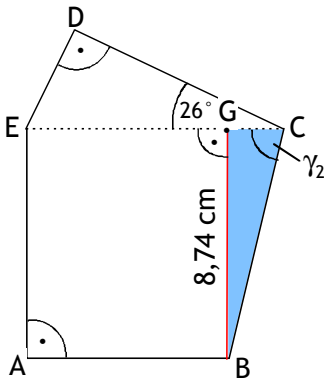


Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W1



→ Berechnung der Strecke $\overline{AB}$:



Figur 3

Zur Berechnung der Strecke $\overline{AB}$ muss man zuerst die Hilfslinie $\overline{BG}$ einzeichnen (siehe Figur 3). Dann gilt:

$\overline{AB} = \overline{CE} - \overline{CG}$. Und mit $\overline{CE} = 10{,}57$ cm (siehe oben):

$\overline{AB} = 10{,}57 \text{ cm} - \overline{CG}$

Die Strecke $\overline{CG}$ kann im Dreieck BCG mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel γ_2 kennt. Es gilt (siehe Figur 3):

$$\tan \gamma_2 = \frac{8{,}74}{\overline{CG}}$$

Für γ_2 gilt: $26^\circ + \gamma_2 = \gamma$. Mit $\gamma = 95^\circ$ (siehe Aufgabenstellung) folgt:

$26^\circ + \gamma_2 = 95^\circ \Leftrightarrow \gamma_2 = 69^\circ$

Einsetzen in $\tan \gamma_2 = \frac{8{,}74}{\overline{CG}}$ ergibt:

$$\tan 69^\circ = \frac{8{,}74}{\overline{CG}} \quad | \cdot \overline{CG}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CG} \cdot \tan 69^\circ = 8{,}74 \quad | : \tan 69^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{CG} = 3{,}35 \text{ cm}$$

Für $\overline{AB} = 10{,}57 \text{ cm} - \overline{CG}$ folgt damit: $\overline{AB} = \underline{7{,}22 \text{ cm}}$

Einsetzen von $\overline{CE} = 10{,}57$ cm, $h = 8{,}74$ cm und $\overline{AB} = 7{,}22$ cm in $A = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CE}) \cdot h$ ergibt schließlich:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot (7{,}22 + 10{,}57) \cdot 8{,}74 = \mathbf{77{,}74 \text{ cm}^2}$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Trapezes ABCE beträgt **$A = 77{,}74$ cm²**.

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W1

Aufgabe W1b:

Lösungsübersicht:

Die Höhe des Rechtecks ist die Strecke $\overline{BC}$. Die Länge des Rechtecks ist $\overline{CF} + \overline{DF}$.

Die Strecke $\overline{BC}$ ist gleich groß wie die Höhe des gleichseitigen Dreiecks EBF (siehe Figur 1). Dessen Höhe kann mit $\overline{BE} = 4e\sqrt{3}$ und der entsprechenden Formel (siehe Formelsammlung) berechnet werden.

Die Strecken $\overline{CF}$ und $\overline{DF}$ kann man mit trigonometrischen Funktionen in den Dreiecken BCF bzw. GFD berechnen. Dazu sollte man zuerst alle Winkel dieser Dreiecke bestimmen (siehe Figuren 2 und 3).

Man beachte bei der Berechnung von $\overline{DF}$, dass der Punkt G aus Symmetriegründen die Strecke $\overline{EF}$ halbiert. Für $\overline{EF}$ gilt: $\overline{EF} = \overline{BE} = 4e\sqrt{3}$

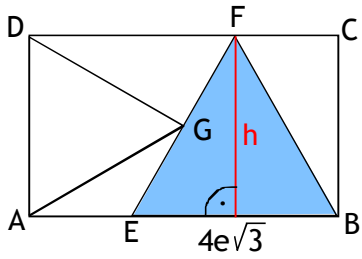
Berechnung des Flächeninhalts des Rechtecks ABCD:

Für den Flächeninhalt des Rechtecks ABCD gilt: $A_{ABCD} = \overline{BC} \cdot (\overline{CF} + \overline{DF})$. Zur Berechnung der Strecken $\overline{BC}$, $\overline{CF}$ und $\overline{DF}$ benötigt man die in den Figuren 2 und 3 eingezeichneten Winkel. Diese Winkel erhält man aus der Tatsache, dass in den gleichseitigen Dreiecken BCF und AGD alle Innenwinkel 60° betragen.

→ Berechnung der Strecke $\overline{BC}$:

Es gilt (siehe Figur 1): $\overline{BC} = h$; wobei h die Höhe im gleichseitigen Dreieck EBF ist.

Mit der Formel $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $a = \overline{BE} = 4e\sqrt{3}$ erhält man: $h = 6e$ bzw. $\mathbf{\overline{BC} = 6e}$

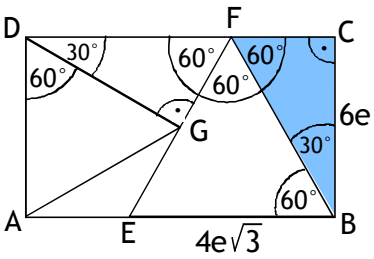


Figur 1

→ Berechnung der Strecke $\overline{CF}$:

Im Dreieck BCF gilt (siehe Figur 2): $\tan 30° = \frac{\overline{CF}}{6e}$

Mit $\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (siehe Formelsammlung) folgt: $\mathbf{\overline{CF} = 2e\sqrt{3}}$

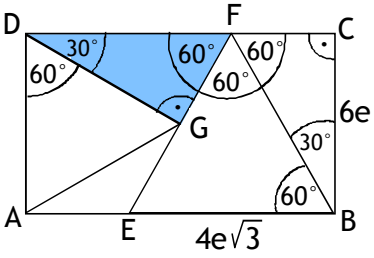


Figur 2

→ Berechnung der Strecke $\overline{DF}$:

Im Dreieck GFD gilt (siehe Figur 3): $\cos 60° = \frac{\overline{GF}}{\overline{DF}}$

Mit $\overline{GF} = 0{,}5\overline{EF} = 2e\sqrt{3}$ und $\cos 60° = \frac{1}{2}$ (siehe Formelsammlung) folgt: $\mathbf{\overline{DF} = 4e\sqrt{3}}$



Figur 3

Einsetzen von $\overline{BC} = 6e$, $\overline{CF} = 2e\sqrt{3}$ und $\overline{DF} = 4e\sqrt{3}$ in $A_{ABCD} = \overline{BC} \cdot (\overline{CF} + \overline{DF})$ ergibt:

$A_{ABCD} = 6e \cdot (2e\sqrt{3} + 4e\sqrt{3}) = 6e \cdot 6e\sqrt{3} = \mathbf{36e^2\sqrt{3}}$; **was zu zeigen war.**

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W2

Aufgabe W2a:

Lösungsübersicht:

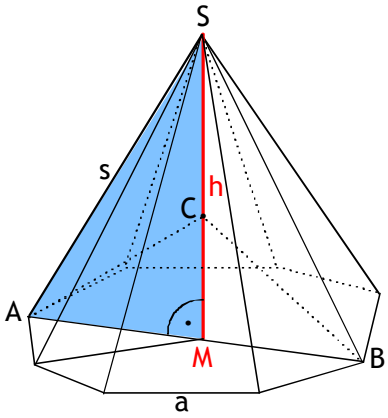
Für die Strecke $\overline{SC}$ gilt: $\overline{SC} = h - \overline{CM}$, wobei $\overline{CM}$ die Höhe des Dreiecks ABC ist (siehe Figur 1 und 3).

- Die Pyramidenhöhe h erhält man mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck AMS (siehe Figur 1). Die dafür benötigte Strecke $\overline{AM}$ kann man mithilfe der 8 gleichschenkligen Dreiecke der Grundfläche berechnen (siehe Figur 2).
- Die Strecke $\overline{CM}$ kann mit dem Flächeninhalt $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CM}$ des Dreiecks ABC berechnet werden, wenn man A_{ABC} und $\overline{AB}$ kennt. Für die Strecke $\overline{AB}$ gilt aus Symmetriegründen: $\overline{AB} = 2\,\overline{AM}$.

Der Flächeninhalt A_{ABC} soll laut Aufgabenstellung so groß sein wie ein Manteldreieck A_M. Zur Berechnung von A_M benötigt man die Höhe h_s eines Manteldreiecks, die man mit den Längen a = 6,2 cm und s = 32,0 cm und dem Satz des Pythagoras berechnen kann (siehe Figur 4).

Berechnung der Länge $\overline{SC}$:

Für die Strecke $\overline{SC}$ gilt (siehe Figur 1): $\overline{SC} = h - \overline{CM}$;
Darin ist der Punkt M die Mitte der Strecke $\overline{AB}$.



Figur 1

→ Berechnung der Höhe h:

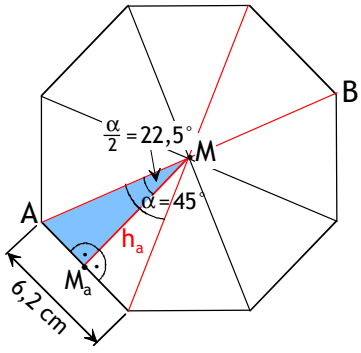
Im Dreieck AMS gilt der Satz des Pythagoras (siehe Figur 1):

$s^2 = \overline{AM}^2 + h^2$

Mit s = 32,0 cm folgt: $1024 = \overline{AM}^2 + h^2$

Die Strecke $\overline{AM}$ kann im markierten Dreieck AM_aM der Figur 2 mit der Sinusfunktion berechnet werden.

Man beachte dazu, dass die Grundfläche der regelmäßigen achtseitigen Pyramide aus 8 gleichschenkligen Dreiecken besteht, die bei M jeweils den Winkel 360°: 8 = 45° haben. Dieser Winkel und die Grundseite a = 6,2 cm wird jeweils durch die Höhe h_a halbiert.
Es gilt (siehe Figur 2):



Figur 2

$$\sin 22{,}5° = \frac{3{,}1}{\overline{AM}} \quad | \cdot \overline{AM}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AM} \cdot \sin 22{,}5° = 3{,}1 \quad | : \sin 22{,}5°$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AM} = 8{,}10 \text{ cm}$$

Einsetzen in $1024 = \overline{AM}^2 + h^2$ ergibt:

$$1024 = 65{,}61 + h^2 \quad | - 65{,}61$$

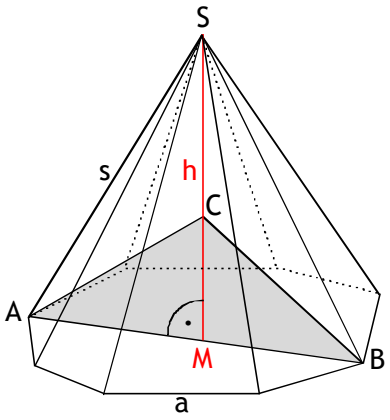
$$\Leftrightarrow \quad 958{,}39 = h^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \quad 30{,}96 = h \quad \text{bzw.} \quad \underline{h = 30{,}96 \text{ cm}}$$

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W2



→ Berechnung der Strecke $\overline{CM}$:



Figur 3

• Die Strecke $\overline{CM}$ kann mit dem Flächeninhalt $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CM}$ berechnet werden, wenn man den Flächeninhalt A_{ABC} und die Strecke $\overline{AB}$ kennt.

Für die Strecke $\overline{AB}$ gilt aus Symmetriegründen: $\overline{AB} = 2\,\overline{AM}$

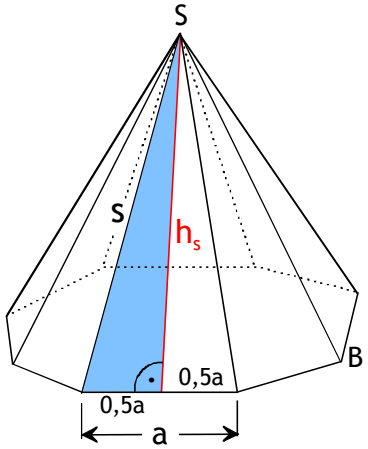
Mit $\overline{AM}$ = 8,10 cm (siehe oben) erhält man: $\overline{AB}$ = 16,20 cm

• Der Flächeninhalt A_{ABC} soll laut Aufgabenstellung so groß sein wie der Flächeninhalt A_M eines der Manteldreiecke. Für A_M gilt (siehe Figur 4):

$A_M = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

Mit a = 6,2 cm folgt: $A_M = 3{,}1\,\text{cm} \cdot h_s$

Die Höhe h_s eines Manteldreiecks kann man mit den Längen a = 6,2 cm und s = 32,0 cm und dem Satz des Pythagoras berechnen (siehe Figur 4). Es gilt:



Figur 4

$s^2 = (0{,}5a)^2 + h_s^2$

Mit s = 32,0 cm und a = 6,2 cm folgt:

$1024 = 9{,}61 + h_s^2 \quad | -9{,}61$

$\Leftrightarrow \quad 1014{,}39 = h_s^2 \quad | \ \sqrt{\ }$

$\Rightarrow \quad 31{,}85 = h_s$ bzw. h_s = 31,85 cm

Einsetzen in $A_M = 3{,}1\,\text{cm} \cdot h_s$ ergibt: $\underline{A_M = 98{,}735\ \text{cm}^2}$

Damit ist laut Aufgabenstellung auch $\underline{A_{ABC} = 98{,}735\ \text{cm}^2}$.

Einsetzen von $\overline{AB}$ = 16,20 cm und $A_{ABC} = 98{,}735\ \text{cm}^2$ in $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CM}$ ergibt:

$98{,}735 = 8{,}10 \cdot \overline{CM} \quad | : 8{,}10$

$\Leftrightarrow \quad 12{,}19 = \overline{CM}$ bzw. $\overline{CM} = \underline{12{,}19\ \text{cm}}$

Für $\overline{SC} = h - \overline{CM}$ erhält man schließlich mit h = 30,96 cm und $\overline{CM}$ = 12,19 cm:

$\overline{\mathbf{SC}}$ = 30,96 cm – 12,19 cm = **18,77 cm**

Ergebnis: Die Länge von $\overline{SC}$ beträgt $\underline{\overline{\mathbf{SC}} = \mathbf{18{,}77\ cm}}$.

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W2

Aufgabe W2b:

Lösungsübersicht:

• Die Restfläche des DIN-A4-Blatts ist ein Drachen mit den Achsen e = 21,0 cm und f = 29,7 cm (siehe Figur 1). Mit der Formel $A_{Rest} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ kann der Flächeninhalt dieser Restfläche berechnet werden.

• Die Flächeninhalte der Manteldreiecke ABS und BCS sind aus Symmetriegründen gleich groß. Es gilt: $A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$. Zur Berechnung von A_{ABS} bzw. A_{BCS} muss man also die Länge a und die Seitenhöhe h_s eines Manteldreiecks bestimmen (siehe Figur 2).

Um die Länge a berechnen zu können, muss man sich klar machen, dass die Länge a die Hypotenuse in einem gleichschenkligen Dreieck ist (siehe Figur 3). Dann kann man a im Dreieck ABM mit der halben Höhe $\overline{BM}$ des DIN-A4-Blatts und der Kosinusfunktion berechnen (siehe Figur 3).

Die Höhe h_s kann man mit dem Satz des Pythagoras im markierten Dreieck der Figur 4 berechnen, wenn man die Strecke s kennt. Die Strecke s wiederum kann ebenfalls mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck ACD bestimmt werden (siehe Figur 5).

Überprüfen von Lenas Behauptung: „Restfläche = A_{ABS} + A_{BCS} ?“:

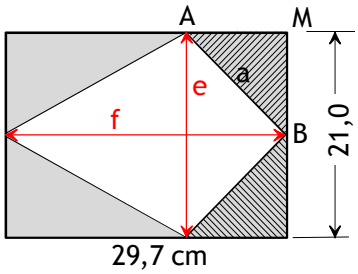
→ Berechnung der Restfläche A_{Rest}:

Die Restfläche A_{Rest} des DIN-A4-Blatts ist ein Drachen mit den Achsen e = 21,0 cm und f = 29,7 cm (siehe Figur 1).

Es gilt: $A_{Rest} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ (siehe Formelsammlung)

Einsetzen von e = 21, 0 cm und f = 29,7 cm ergibt:

$A_{Rest} = 311{,}85\ cm^2$



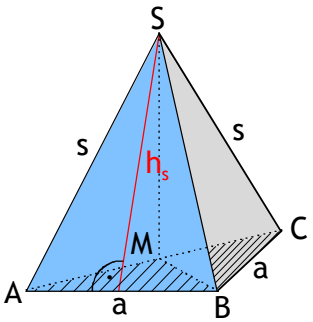
Figur 1

→ Berechnung der Manteldreiecke ABS und BCS:

Beide Manteldreiecke sind kongruent, sodass man nur den Flächeninhalt eines der beiden Manteldreiecke berechnen muss. Es gilt (siehe Figur 2): $A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

• Die **Länge a** ist die Hypotenuse im gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck ABM (siehe Figur 1, 2 und 3). Dessen spitze Winkel sind gleich groß und betragen jeweils 45°.

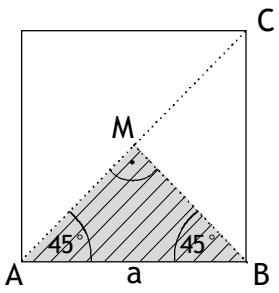
(Hinweise: Die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ sind jeweils die halbe Diagonale in einem Quadrat (siehe Figur 3). Somit gilt: $\overline{AM} = \overline{BM}$
Dass die beiden spitzen Winkel in ABM jeweils 45° betragen, folgt aus der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABM:
45° + 45° + 90° = 180°.)



Figur 2

Die Länge a kann somit mit der Kosinusfunktion im Dreieck ABM berechnet werden. Es gilt (siehe Figur 3):

$\cos 45° = \frac{\overline{BM}}{a}$



Figur 3

Für $\overline{BM}$ gilt (siehe Figur 1): $\overline{BM}$ = 21,0 cm : 2 = 10,5 cm

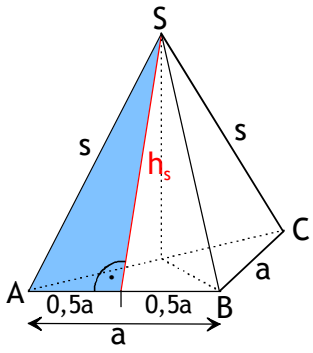
Damit folgt:

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W2

$$\cos 45^\circ = \frac{10{,}5}{a} \quad | \cdot a$$

$$\Leftrightarrow \quad a \cdot \cos 45^\circ = 10{,}5 \quad | : \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{a = 14{,}85 \text{ cm}}$$



Figur 4

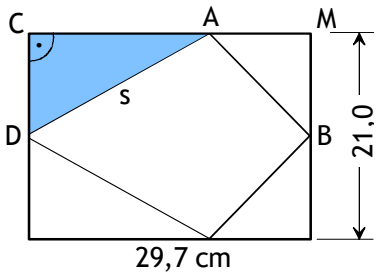
• Die **Länge h_s** kann im markierten Dreieck der Figur 4 mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Länge s kennt. Es gilt:

$s^2 = (0{,}5a)^2 + h_s^2$

Mit a = 14,85 cm erhält man: $s^2 = 55{,}13 + h_s^2$

Die Länge s bzw. s^2 wiederum kann im markierten Dreieck der Figur 5 ebenfalls mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Es gilt (siehe Figur 5):

$s^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$



Figur 5

Darin ist $\overline{CD} = \overline{BM} = 10{,}5$ cm und $\overline{AC} = 29{,}7 \text{ cm} - \overline{AM}$.

Wegen $\overline{AM} = \overline{BM} = 10{,}5$ cm folgt: $\overline{AC} = 19{,}2$ cm

Einsetzen von $\overline{CD} = 10{,}5$ cm und $\overline{AC} = 19{,}2$ cm in $s^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$ ergibt:

$s^2 = 478{,}89$

Einsetzen von $s^2 = 478{,}89$ in $s^2 = 55{,}13 + h_s^2$ ergibt:

$$478{,}89 = 55{,}13 + h_s^2 \quad | \ -55{,}13$$

$$\Leftrightarrow \quad 423{,}76 = h_s^2 \quad | \ \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \quad 20{,}59 = h_s \text{ bzw. } \underline{h_s = 20{,}59 \text{ cm}}$$

Für $A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$ erhält man mit a = 14,85 cm und h_s = 20,59 cm schließlich:

$\underline{A_{ABS} = 152{,}88 \text{ cm}^2}$ und damit auch $\underline{A_{BCS} = 152{,}88 \text{ cm}^2}$

Die Summe beider Flächeninhalte ist: $\underline{A_{ges} = 305{,}76 \text{ cm}^2}$

Wegen $A_{ges} \neq A_{Rest}$ hat Lena nicht Recht.

Ergebnis: Die Restfläche des Blatts ist $\mathbf{A_{Rest} = 311{,}85 \text{ cm}^2}$. Der Flächeninhalt beider Manteldreiecke zusammen beträgt $\mathbf{A_{ges} = 305{,}76 \text{ cm}^2}$. **Somit hat Lena nicht Recht.**

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W3



Aufgabe W3a:

Lösungsübersicht:

• Um die **Funktionsgleichung der Geraden g** aufzustellen, benötigt man die Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 und S_2. Deren Koordinaten kann man durch eine quadratische Ergänzung der Gleichungen von p_1 und p_2 bestimmen. Die Gleichung der Normalparabel p_1 erhält man, indem man die Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit der x-Achse $N_1(-5|0)$ und $N_2(-1|0)$ in die Gleichung $y = x^2 + bx + c$ einsetzt und das resultierende Gleichungssystem nach b und c auflöst. Eleganter erhält man die Gleichung von p_1 allerdings mit dem Nullstellenansatz $y = (x - x_1)(x - x_2)$ und mit den angegebenen Nullstellen $x_1 = -5$ und $x_2 = -1$.

• Um den **Schnittwinkel zwischen den Geraden g und h** zu bestimmen, sollte man eine Zeichnung beider Geraden erstellen (siehe Figur 1, Seite 20). Darin kann der gesuchte Schnittwinkel mithilfe der Summe der Innenwinkel im Dreieck CDE berechnet werden (siehe Figur 1). Die beiden spitzen Winkel bei C und D sind die Schnittwinkel von g und h mit der y-Achse und können mit den Steigungen von g und h bestimmt werden. Um die Gleichung der Geraden h aufstellen zu können, benötigt man noch die Koordinaten des Punktes C, der laut Aufgabenstellung die Mitte von A und B sein soll. Da die Punkte A und B die Schnittpunkte von p_1 und p_2 mit der y-Achse sind, haben sie jeweils die x-Koordinate $x = 0$. Deren y-Koordinaten erhält man jeweils durch Einsetzen von $x = 0$ in die Gleichung von p_1 bzw. p_2.

Alternativ dazu kann man den Schnittwinkel zwischen g und h auch direkt anhand der beiden Geradensteigungen argumentativ bestimmen. Dazu sollte man jeweils zuerst ein Steigungsdreieck von g und h zeichnen und daraus den jeweiligen Steigungswinkel berechnen (siehe Figur 2, Seite 20).

Die Funktionsgleichung der Geraden g:

Die allgemeine Gleichung der Geraden g ist $y = m \cdot x + c$. Indem man die Koordinaten zweier Punkte von g jeweils in $y = m \cdot x + c$ einsetzt, erhält man ein Gleichungssystem, das nach der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt c aufgelöst werden kann. Man benötigt also zunächst die Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 und S_2 der beiden Parabeln, durch die die Gerade g laufen soll.

→ Berechnung der Koordinaten von S_1 und S_2:

Die Koordinaten von S_2 erhält man, indem die Gleichung von p_2: $y = x^2 - 6x + 11$ mit einer quadratischen Ergänzung in eine Scheitelform umwandelt:

$$y = x^2 - 6x + 11$$

$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 6x + 3^2 + 11 - 3^2 \quad | \text{ Anwenden der zweiten binomischen Formel}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (x - 3)^2 + 11 - 9$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (x - 3)^2 + 2$$

Dieser Scheitelform entnimmt man: $\mathbf{S_2(3|2)}$

Um die Koordinaten von S_1 bestimmen zu können, muss man zuerst die Gleichung von p_1 aufstellen. Einsetzen der Koordinaten von $N_1(-5|0)$ und $N_2(-1|0)$ in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ ergibt das folgende Gleichungssystem:

Mit $N_1(-5|0)$: $\quad 0 = (-5)^2 + b \cdot (-5) + c \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 25 - 5b + c \quad$ (I)

Mit $N_2(-1|0)$: $\quad 0 = (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 1 - 1b + c \quad$ (II)

(I) – (II) ergibt: $\quad 0 = 24 - 4b \quad | \; +4b$

$$\Leftrightarrow \quad 4b = 24 \quad | \; : 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{b = 6}$$

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W3



Einsetzen von b = 6 in Gleichung (II) $0 = 1 - 1b + c$ ergibt:

$$0 = 1 - \mathbf{6} + c$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = -5 + c \quad | + 5$$
$$\Leftrightarrow \quad 5 = c \text{ bzw. } \mathbf{c = 5}$$

Die Funktionsgleichung der Parabel p_1 lautet also $\mathbf{p_1: \ y = x^2 + 6x + 5}$

Hinweis: Eleganter kann man die Gleichung von p_1 mit dem Nullstellenansatz $y = (x - x_1)\cdot(x - x_2)$ und den Nullstellen $x_1 = -5$ und $x_2 = -1$ bestimmen. Man erhält:

$p_1: \ y = (x - (-5))\cdot(x - (-1)) = (x + 5)\cdot(x + 1) = x^2 + 1x + 5x + 5 = x^2 + 6x + 5$

Die Koordinaten von S_1 erhält man nun, indem die Gleichung von p_1: $y = x^2 + 6x + 5$ mit einer quadratischen Ergänzung in eine Scheitelform umwandelt:

$$y = x^2 + 6x + 5$$
$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 + 6x \ \mathbf{+ 3^2} + 5 - \mathbf{3^2} \quad | \text{ Anwenden der ersten binomischen Formel}$$
$$\Leftrightarrow \quad y = (x + 3)^2 + 5 - 9$$
$$\Leftrightarrow \quad y = (x + 3)^2 - 4$$

Dieser Scheitelform entnimmt man: $\mathbf{S_1(-3\,|\,-4)}$

Durch Einsetzen der Koordinaten von $\mathbf{S_1(-3\,|\,-4)}$ und $\mathbf{S_2(3\,|\,2)}$ in $y = mx + c$ erhält man:

Mit $S_1(\mathbf{-3}\,|\,\mathbf{-4})$: $\mathbf{-4} = m\cdot(\mathbf{-3}) + c \ \Leftrightarrow \ -4 = -3m + c$ (I)

Mit $S_2(\mathbf{3}\,|\,\mathbf{2})$: $\mathbf{2} = m\cdot\mathbf{3} + c \ \Leftrightarrow \ 2 = 3m + c$ (II)

(I) – (II) ergibt: $-6 = -6m \quad | \ :(-6)$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = m \text{ bzw. } \mathbf{m = 1}$$

Einsetzen von m = 1 in (II) $2 = 3m + c$ ergibt:

$$2 = 3 + c \quad | \ -3$$
$$\Leftrightarrow \quad -1 = c \text{ bzw. } \mathbf{c = -1}$$

Damit lautet die Gleichung von **g**: $\mathbf{y = 1x - 1}$

Ergebnis: Die Gerade g hat die Gleichung $\mathbf{y = 1x - 1}$ bzw. $\mathbf{y = x - 1}$.

(Hinweis: Man kann die Steigung m der Geraden g auch mit der Zwei-Punkte-Form bestimmen (siehe Formelsammlung): $m = \frac{2-(-4)}{3-(-3)} = \frac{6}{6} = 1$. Indem man anschließend die Koordinaten von $S_1(-3\,|\,-4)$ oder $S_2(3\,|\,2)$ in $y = 1x + c$ einsetzt, erhält man den y-Achsenabschnitt c.)

Der Schnittwinkel zwischen den Geraden g und h:

Lösungsvariante 1:

Zunächst muss die Gleichung der Geraden h bestimmt werden. Anhand des Schaubilds der Geraden g und h kann dann der gesuchte Schnittwinkel ermittelt werden.

→ Berechnung der Geraden h:

Mit der Steigung m = –1 lautet die unvollständige Gleichung der Geraden h: $y = -1x + c$. Zur Berechnung des y-Achsenabschnitts c muss man die Koordinaten eines Punktes von h in die Gleichung $y = -1x + c$ einsetzen. Ein solcher Punkt ist C, der laut Aufgabenstellung die Mitte der Punkte A und B sein soll.

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W3

Die Punkte A und B sind die Schnittpunkte der Parabeln p_1: $y = x^2 + 6x + 5$ und p_2: $y = x^2 - 6x + 11$ mit der y-Achse.

• Schnittpunkt von p_1: $y = x^2 + 6x + 5$ mit der y-Achse:
Einsetzen von x = 0 ergibt: $y = 0^2 + 6 \cdot 0 + 5 = 5 \Rightarrow$ A(0|5)

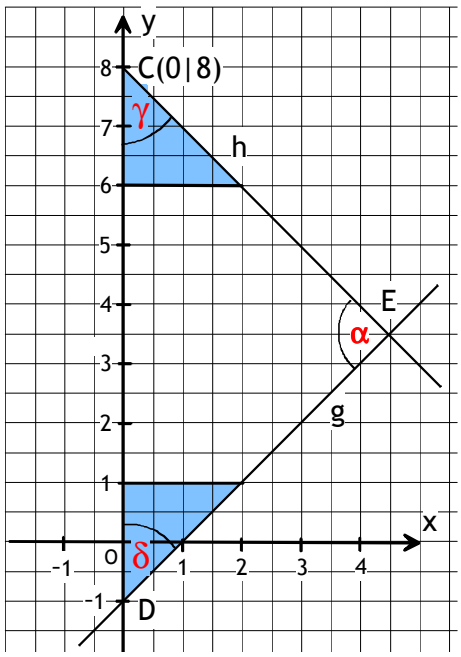
• Schnittpunkt von p_2: $y = x^2 - 6x + 11$ mit der y-Achse:
Einsetzen von x = 0 ergibt: $y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 11 = 11 \Rightarrow$ B(0|11)

Da beide Punkte A(0|5) und B(0|11) auf der y-Achse liegen und C die Mitte von A und B sein soll, muss die x-Koordinate von C auch 0 sein: $C(0|y_C)$.
Die y-Koordinate von C ist das arithmetische Mittel der y-Koordinaten von A(0|5) und B(0|11); also: $y_C = \frac{5+11}{2} = 8 \Rightarrow$ **C(0|8)**

Einsetzen der Koordinaten von C(0|8) in h: $y = -1x + c$ ergibt: $8 = -1 \cdot 0 + c \Leftrightarrow c = 8$

Die Gleichung der Geraden h ist somit **h: $y = -1x + 8$**

Den Schnittwinkel α zwischen g: $y = 1x - 1$ und h: $y = -1x + 8$ kann man nun anhand der Graphen der Geraden g und h bestimmen, die mithilfe ihrer Steigungen und y-Achsenabschnitte erstellt werden können (siehe Figur 1).



Figur 1

Für die Summe der Innenwinkel im Dreieck DEC gilt:

$\delta + \alpha + \gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 180^\circ - \gamma - \delta$

Die Winkel δ und γ sind die Schnittwinkel der Geraden g und h mit der y-Achse und können mithilfe der Tangensfunktion in den Steigungsdreiecken von g und h bestimmt werden.

Im eingezeichneten Steigungsdreieck von g gilt:

$\tan\delta = \frac{2}{2} \Rightarrow$ **$\delta = 45^\circ$**

Im eingezeichneten Steigungsdreieck von h gilt:

$\tan\gamma = \frac{2}{2} \Rightarrow$ **$\gamma = 45^\circ$**

Einsetzen von $\delta = 45^\circ$ und $\gamma = 45^\circ$ in $\alpha = 180^\circ - \gamma - \delta$ ergibt:

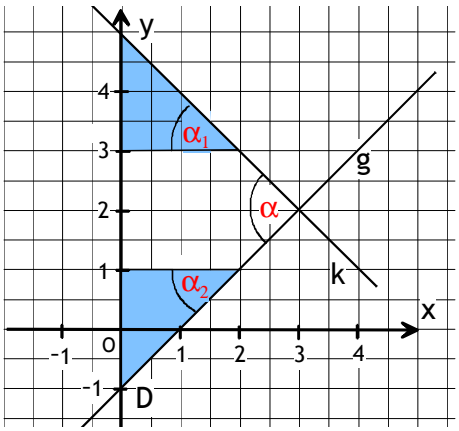
$\alpha = 90^\circ$

Ergebnis: Die Geraden g und h schneiden sich unter dem Winkel **$\alpha = 90^\circ$**.

Lösungsvariante 2:

Da nur nach dem Schnittwinkel zwischen g und h gefragt ist, kann man auch den Schnittwinkel zwischen g und einer zu h parallelen Geraden k bestimmen. In diesem Fall braucht man die Koordinaten von C erst gar nicht berechnen. In Figur 2 ist die zu h parallele Gerade k mit der Steigung $m_k = m_h = -1$ eingezeichnet. Für den Schnittwinkel α gilt (siehe Figur 2):

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$



Figur 2

Die Winkel α_1 und α_2 können in den Steigungsdreiecken von g und k mit der Tangensfunktion berechnet werden.

Aus $\tan\alpha_1 = \frac{2}{2}$ und $\tan\alpha_2 = \frac{2}{2}$ folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$.

Und damit ist **$\alpha = 90^\circ$**.

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W3

Aufgabe W3b:

Lösungsübersicht:

• Um den **Flächeninhalt A des Dreiecks N_1N_2C** zu bestimmen, muss man zuerst die Koordinaten der Punkte N_1, N_2 und C berechnen. Für den Flächeninhalt gilt dann (siehe Figur 1): $A = \frac{1}{2} g \cdot h$; wobei die Grundseite g des Dreiecks N_1N_2C der Abstand der Punkte N_1 und N_2 ist und die Höhe h der Abstand des Punktes C von der y-Achse (siehe Figur 1). Die Punkte N_1 und N_2 sind laut Aufgabenstellung die Schnittpunkte der Parabel p mit der x-Achse. Der Punkt C ist der Schnittpunkt der Geraden g: $y = x$ mit der Parabel p.

• Um **Peters Behauptung** zu überprüfen, muss man den Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2D berechnen. Dabei geht man genauso vor wie bei der Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks N_1N_2C im ersten Aufgabenteil; mit dem einzigen Unterschied, dass man nun den *Schnittpunkt D* zwischen der Geraden h und der Parabel p berechnen muss.

Der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2C:

Zuerst muss man die Koordinaten der Punkte N_1, N_2 und C berechnen und das Dreieck N_1N_2C in ein Koordinatensystem einzeichnen. Daran wird klar, wie man die Grundseite g und die Höhe h des Dreiecks N_1N_2C bestimmen kann.

→ Berechnung der Koordinaten der Punkte N_1, N_2 und C:

• Schnitt der Parabel p: $y = x^2 + 6x$ mit der x-Achse:

Einsetzen von $y = 0$ in $y = x^2 + 6x$ ergibt:

$0 = x^2 + 6x$ | Ausklammern von „x“

$\Leftrightarrow$ $0 = x \cdot (x + 6)$ | Satz vom Nullprodukt anwenden

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$ und $x_2 = -6$

Damit sind die Nullstellen der Parabel p: **$N_1(0|0)$** und **$N_2(-6|0)$**

• Die Schnittpunkte zwischen g und p erhält man durch Gleichsetzen ihrer Funktionsterme:

$x = x^2 + 6x$ | $-x$

$\Leftrightarrow$ $0 = x^2 + 5x$ | Ausklammern von „x“

$\Leftrightarrow$ $0 = x \cdot (x + 5)$ | Satz vom Nullprodukt anwenden

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$ und $x_2 = -5$. Das sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte.

Einsetzen von $x_1 = 0$ in g: $y = x$ ergibt: $y_1 = 0$ $\Rightarrow$ $S_1(0|0) = N_1(0|0)$

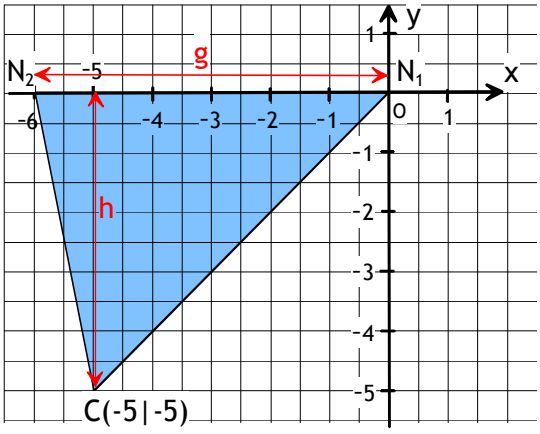
Einsetzen von $x_2 = -5$ in g: $y = x$ ergibt: $y_2 = -5$ $\Rightarrow$ **$C(-5|-5)$**

Wie man in der Zeichnung des Dreiecks N_1N_2C erkennt, gilt für die Grundseite g und für die Höhe h (siehe Figur 1):

$g = 6$ LE und $h = 5$ LE.

Damit folgt für den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} g \cdot h$ des Dreiecks N_1N_2C:

$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$ FE; (FE = Flächeneinheiten)



Figur 1

Ergebnis:

Der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2C beträgt **A = 15 FE**.

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W3



Der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2D und Peters Behauptung:

Um Peters Behauptung zu überprüfen, muss man zuerst die Koordinaten des Punktes D und damit den Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2D berechnen.

→ Berechnung der Koordinaten des Punktes D:

• Schnitt von h: $y = \frac{1}{2}x$ mit der Parabel p:

Gleichsetzen der Funktionsterme ergibt:

$\frac{1}{2}x = x^2 + 6x \quad | \; -\frac{1}{2}x$

$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + 5{,}5x \quad |$ Ausklammern von „x“

$\Leftrightarrow \quad 0 = x \cdot (x + 5{,}5) \quad |$ Satz vom Nullprodukt anwenden

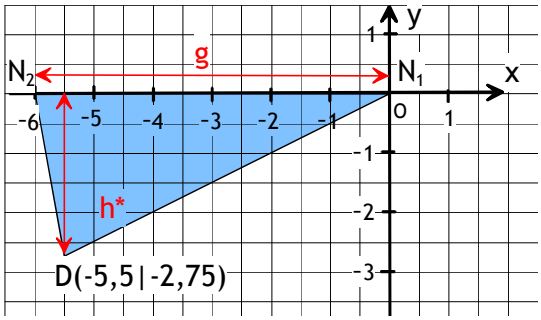
$\Rightarrow \quad x_1 = 0$ und $x_2 = -5{,}5$

Das sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte.

Einsetzen von $x_1 = 0$ in g: $y = \frac{1}{2}x$ ergibt: $y_1 = 0 \Rightarrow S_1(0|0) = N_1(0|0)$

Einsetzen von $x_2 = -5{,}5$ in h: $y = \frac{1}{2}x$ ergibt: $y_2 = -2{,}75 \Rightarrow$ **D(–5,5|–2,75)**

Wie man in der Zeichnung des Dreiecks N_1N_2D erkennt, gilt für die Grundseite g und für die Höhe h* (siehe Figur 2): g = 6 LE und h* = 2,75 LE. Damit folgt für den Flächeninhalt $A^* = \frac{1}{2} g \cdot h^*$ des Dreiecks N_1N_2D:



Figur 2

A* $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}75 =$ **8,25 FE**; (FE = Flächeneinheiten)

Die Hälfte des Flächeninhalts von N_1N_2C beträgt aber nur 7,5 FE ($= \frac{15}{2}$). Somit hat Peter nicht Recht.

Ergebnis:

Peter hat nicht Recht. Der Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2D ist mit **A* = 8,25 FE** etwas größer als die Hälfte des Flächeninhalts des Dreiecks N_1N_2C.

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W4

Aufgabe W4a:

Lösungsübersicht:

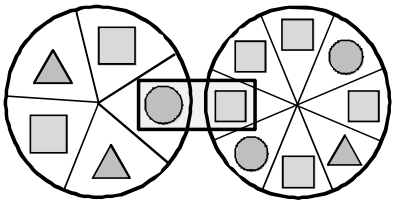
• Um die **Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „*zwei gleiche Symbole*“** berechnen zu können, muss man zuerst bestimmen, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die einzelnen Symbole auf jedem Glücksrad bei einmaligem Drehen erscheinen. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „*zwei gleiche Symbole*“ kann dann mit der Produkt- und Summenregel berechnet werden.

• Zur Berechnung des **Erwartungswerts** benötigt man noch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „*Kreis und Dreieck*“. Zu diesem Ereignis gehören die Ergebnisse „*Kreis; Dreieck*“ und „*Dreieck; Kreis*“. Deren Wahrscheinlichkeiten können mit der Produktregel berechnet werden. Daraus erhält man mit der Summenformel die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „*Kreis und Dreieck*“. Den Erwartungswert kann man dann mit der entsprechenden Formel berechnen (siehe Formelsammlung).

• Damit das Spiel fair wird, muss man den **Gewinn für das Ereignis „*Kreis und Dreieck*“** so wählen, dass der Erwartungswert E Null wird. Zur Berechnung dieses Gewinns muss man für ihn eine Variable einführen und in der Formel des Erwartungswerts für E = 0 setzen. Indem man die resultierende Gleichung nach der Gewinnvariablen auflöst, erhält man den gesuchten Betrag.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, zwei gleiche Symbole im Fenster zu sehen:

Zunächst muss man bestimmen, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die einzelnen Symbole auf jedem Glücksrad bei einmaligem Drehen erscheinen. Durch Abzählen erhält man:



Linkes Glücksrad:

$P_L(\text{Kreis}) = \frac{1}{5}$; $P_L(\text{Quadrat}) = \frac{2}{5}$; $P_L(\text{Dreieck}) = \frac{2}{5}$

Rechtes Glücksrad:

$P_R(\text{Kreis}) = \frac{2}{8}$; $P_R(\text{Quadrat}) = \frac{5}{8}$; $P_R(\text{Dreieck}) = \frac{1}{8}$

Das Ereignis „*zwei gleiche Symbole*“ setzt sich aus den drei Ergebnissen (*Kreis; Kreis*), (*Quadrat; Quadrat*) und (*Dreieck; Dreieck*) zusammen.

(Hinweis: „(*Kreis; Kreis*)“ bedeutet, dass im linken Glücksrad „*Kreis*“ erscheint und im rechten Glücksrad ebenfalls „*Kreis*“. Bei den Ausgängen „(*Quadrat; Quadrat*)“ und „(*Dreieck; Dreieck*)“ entsprechend.)

Mit der Produktregel erhält man:

$$P(\text{Kreis; Kreis}) = P_L(\text{Kreis}) \cdot P_R(\text{Kreis}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{40} = \mathbf{\frac{1}{20}}$$

$$P(\text{Quadrat; Quadrat}) = P_L(\text{Quadrat}) \cdot P_R(\text{Quadrat}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{10}{40} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$P(\text{Dreieck; Dreieck}) = P_L(\text{Dreieck}) \cdot P_R(\text{Dreieck}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{40} = \mathbf{\frac{1}{20}}$$

Mit der Summenregel folgt:

$$\mathbf{P(\textit{zwei gleiche Symbole})} = \frac{1}{20} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{20} + \frac{5}{20} + \frac{1}{20} = \mathbf{\frac{7}{20}} = \mathbf{35\ \%}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleiche Symbole im Sichtfenster erscheinen, beträgt **35 %**.

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W4



Berechnung des Erwartungswerts (aus Sicht eines Spielers):

Für den Erwartungswert E aus Sicht eines Spielers gilt (siehe Formelsammlung):

$E = P(\textit{gleiche Symbole}) \cdot \mathbf{2{,}00\ €} + P(\textit{Kreis und Dreieck}) \cdot \mathbf{4{,}00\ €} - \mathbf{1{,}50\ €}$

Die Wahrscheinlichkeit P(*gleiche Symbole*) wurde bereits oben berechnet: $\mathbf{P(\textit{gleiche Symbole})} = \frac{7}{20}$

Zu dem Ereignis „*Kreis und Dreieck*“ gehören die Ergebnisse „*Kreis; Dreieck*“ und „*Dreieck; Kreis*“.

(Hinweis: „*Kreis; Dreieck*“ bedeutet, dass im linken Glücksrad „*Kreis*“ erscheint und im rechten Glücksrad „*Dreieck*“. Beim Ausgang „*Dreieck; Kreis*“ ist es gerade umgekehrt.)

Mit der Produktregel erhält man:

$$P(\text{Kreis; Dreieck}) = P_L(\text{Kreis}) \cdot P_R(\text{Dreieck}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{1}{40}}$$

$$P(\text{Dreieck; Kreis}) = P_L(\text{Dreieck}) \cdot P_R(\text{Kreis}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{40} = \mathbf{\frac{1}{10}}$$

Mit der Summenregel folgt: $\mathbf{P(\textit{Kreis und Dreieck}) = \frac{1}{40} + \frac{1}{10} = \frac{1}{8} = 12{,}5\ \%}$

Einsetzen von $P(\textit{gleiche Symbole}) = \frac{7}{20}$ und $P(\textit{Kreis und Dreieck}) = \frac{1}{8}$ in

$E = P(\textit{gleiche Symbole}) \cdot 2{,}00\ € + P(\textit{Kreis und Dreieck}) \cdot 4{,}00\ € - 1{,}50\ €$ ergibt:

$$\mathbf{E} = \frac{7}{20} \cdot 2{,}00\ € + \frac{1}{8} \cdot 4{,}00\ € - 1{,}50\ € = \mathbf{-0{,}30\ €}$$

Ergebnis:

Der Erwartungswert aus Sicht eines Spielers ist **E = –0,30 €**. Ein Spieler muss also mit Verlust rechnen.

Der neue Gewinn für das Ereignis „Kreis und Dreieck“:

Man muss den neuen Gewinn für das Ereignis „*Kreis und Dreieck*“ so wählen, dass der Erwartungswert $E_{neu} = 0$ wird. Nur dann ist das Spiel auch fair.

Wenn man diesen neuen Gewinn mit der Variable **x** bezeichnet, lautet der neue Erwartungswert:

$$E_{neu} = \frac{7}{20} \cdot 2{,}00\ € + \frac{1}{8} \cdot \mathbf{x} - 1{,}50\ €$$

Mit $E_{neu} = 0$ folgt:

$$0 = \frac{7}{20} \cdot 2{,}00 + \frac{1}{8} \cdot \mathbf{x} - 1{,}50$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 0{,}70 + \frac{1}{8} \cdot \mathbf{x} - 1{,}50$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = -0{,}80 + \frac{1}{8} \cdot \mathbf{x} \quad | + 0{,}80$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}80 = \frac{1}{8} \cdot \mathbf{x} \quad | \cdot 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 6{,}40 = \mathbf{x} \text{ bzw. } \mathbf{x} = \mathbf{6{,}40\ €}$$

Ergebnis: Damit das Spiel fair wird, muss der neue Gewinn für das Ereignis „*Kreis und Dreieck*“ **6,40 €** betragen.

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W4

Aufgabe W4b:

Lösungsübersicht:

• Um eine **Funktionsgleichung der Parabel p** zu bestimmen, muss man in die Skizze ein Koordinatensystem so einzeichnen, dass der Scheitelpunkt der Parabel auf der y-Achse liegt und der Boden des Spielfelds der x-Achse entspricht (siehe Figur 1). Dann kann die Flugbahn des Balls mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ beschrieben werden. Mithilfe der angegebenen Maße kann man die Koordinaten des Scheitelpunkts S und des Abschlagpunkts A bestimmen. Durch jeweiliges Einsetzen dieser Koordinaten in die Gleichung $y = ax^2 + c$ erhält man ein Gleichungssystem, dessen Lösung die Werte für a und c sind.

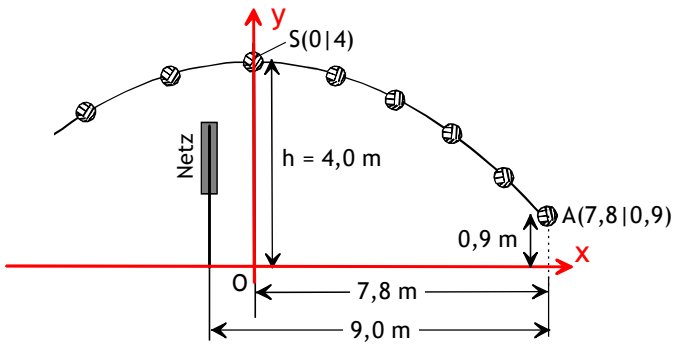
• Um den **Abstand des Balls zum Netz** im Moment der Netzüberquerung zu berechnen, muss man die y-Koordinate des Balls (Punkt C in Figur 2) in diesem Moment bestimmen und die y-Koordinate der Netzkante davon abziehen. Die y-Koordinate des Punktes C erhält man, indem man die x-Koordinate der Netzkante B in die Parabelgleichung einsetzt. Die x-Koordinate der Netzkante kann man in dem eingezeichneten Koordinatensystem leicht anhand der angegebenen Maße bestimmen (siehe Figur 2).

• Um die **Entfernung des auftreffenden Balls zur linken Grundlinie** zu bestimmen, muss man die linke Nullstelle der Parabel berechnen. Außerdem benötigt man die x-Koordinate x_G der linken Grundlinie, die man in dem eingezeichneten Koordinatensystem anhand der angegebenen Maße bestimmen kann (siehe Figur 3).

Eine Funktionsgleichung der Parabel p:

Zunächst sollte man in die Skizze ein Achsenkreuz so eintragen, dass die Flugbahn des Balles symmetrisch zur y-Achse verläuft (siehe Figur 1). Die Parabel hat dann die allgemeine Gleichung $y = ax^2 + c$.
Im eingezeichneten Koordinatensystem hat der Scheitelpunkt S die Koordinaten S(0|4) und der Abschlagspunkt A die Koordinaten A(7,8|0,9).

(Hinweis: Die y-Koordinate von S ist die maximale Höhe der Flugbahn. Die y-Koordinate des Abschlagpunkts A ist die angegebene Höhe 90 cm = 0,9 m.)



Figur 1

Aus der y-Koordinate des Scheitelpunkts S(0|4) folgt sofort: **c = 4**
Damit lautet die unvollständige Gleichung von p: $y = ax^2 + 4$

Einsetzen der Koordinaten von A(**7,8**|**0,9**) in **y** = a·**x**^{2} + 4 ergibt:

$$\mathbf{0{,}9} = a \cdot (\mathbf{7{,}8})^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}9 = 60{,}84\,a + 4 \quad | -4$$

$$\Leftrightarrow \quad -3{,}1 = 60{,}84\,a \quad | : 60{,}84$$

$$\Leftrightarrow \quad -0{,}051 = a \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a = -0{,}051}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung von **p**: $\mathbf{y = -0{,}051x^2 + 4}$

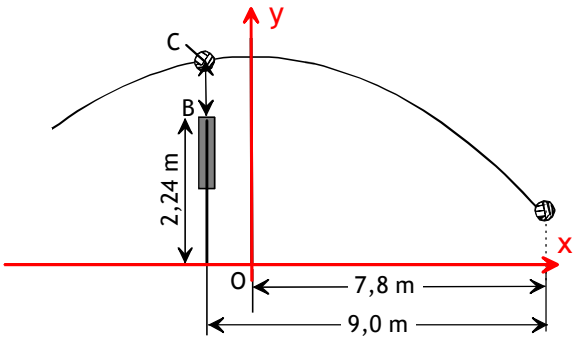
Ergebnis: Die Flugbahn des Balls kann mit der Parabel **p: $y = -0{,}051x^2 + 4$** beschrieben werden.

Lösungen zur Prüfung 2020: Wahlbereich - Aufgabe W4



Der Abstand, in dem der Ball das Netz überquert:

Der **Abstand d des Balls zum Netz** im Moment der Netzüberquerung ist der Abstand der Punkte C und B (siehe Figur 2). Der Punkt B ist der höchste Punkt des Netzes, der Punkt C beschreibt den Ort des Balls im Moment der Netzüberquerung.



Figur 2

Anhand der angegebenen Maße kann man die Koordinaten von B bestimmen: B(–1,2 | 2,24)

(Hinweis: Die x-Koordinate von B ist $x_B = 7{,}8 - 9{,}0 = -1{,}2$. Die y-Koordinate von B ist die Netzhöhe 2,24 m.)

Im Moment der Netzüberquerung hat der Punkt C die gleiche x-Koordinate wie B(–1,2 | 2,24); also C(–1,2 | y_C).

Die y-Koordinate von C(**–1,2** | y_C) kann man berechnen, indem man **x = –1,2** in die Parabelgleichung $y = -0{,}051x^2 + 4$ einsetzt. Man erhält:

$y_C = -0{,}051 \cdot (\mathbf{-1{,}2})^2 + 4 = -0{,}051 \cdot \mathbf{1{,}44} + 4 = 3{,}93$

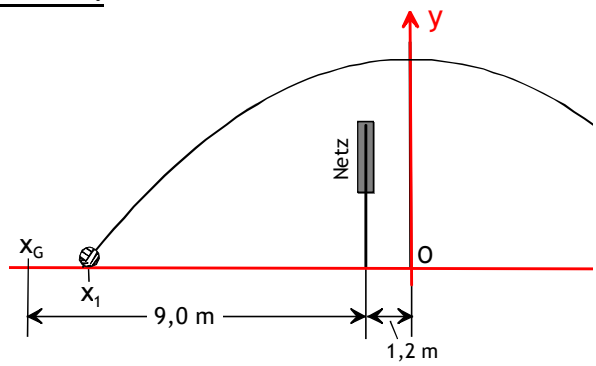
Indem man von $y_C = 3{,}93$ m die Netzhöhe 2,24 m abzieht, erhält man den gesuchten Abstand:

$d = 3{,}93\text{ m} - 2{,}24\text{ m} = 1{,}69\text{ m}$

Ergebnis: Der Ball überquert das Netz in einem Abstand von **1,69 m** zur oberen Netzkante.

Die Entfernung zwischen dem Auftreffpunkt und der Grundlinie:

Um die Entfernung zwischen dem Auftreffpunkt des Balls und der linken Grundlinie zu berechnen, benötigt man die linke Nullstelle x_1 der Parabel p und die x-Koordinate der linken Grundlinie (siehe Figur 3).



Figur 3

Einsetzen von $y = 0$ in $y = -0{,}051x^2 + 4$ ergibt:

$0 = -0{,}051x^2 + 4 \quad | \; -4$

$\Leftrightarrow \quad -4 = -0{,}051x^2 \quad | \; :(-0{,}051)$

$\Leftrightarrow \quad 78{,}43 = x^2 \quad | \; \pm\sqrt{\ }$

$\Rightarrow \quad \pm 8{,}86 = x_{1,2}$ bzw. $x_1 = -8{,}86$ und $x_2 = +8{,}86$

Weil die linke Grundlinie im negativen Bereich liegt, ist im eingezeichneten Koordinatensystem die Stelle, wo der Ball auftrifft: $\mathbf{x_1 = -8{,}86}$

Die x-Koordinate der linken Grundlinie ist im eingezeichneten Koordinatensystem (siehe Figur 3):

$\mathbf{x_G = -10{,}2}$ (Hinweis: $|x_G| = 9{,}0 + 1{,}2 = 10{,}2$)

Die Entfernung zwischen dem auftreffenden Ball und der Grundlinie ist also: $\mathbf{d^* = x_1 - x_G}$

Und mit Zahlen: $\mathbf{d^*} = -8{,}86 - (-10{,}2) = -8{,}86 + 10{,}2 = \mathbf{1{,}34}$

Ergebnis: Der Ball trifft **1,34 m** vor der linken Grundlinie auf dem Boden auf.