



Pflichtteil	2
Wahlteil - Aufgabe W1a	11
Wahlteil - Aufgabe W1b	13
Wahlteil - Aufgabe W2a	15
Wahlteil - Aufgabe W2b	16
Wahlteil - Aufgabe W3a	18
Wahlteil - Aufgabe W3b	20
Wahlteil - Aufgabe W4a	22
Wahlteil - Aufgabe W4b	24

Wichtige Hinweise zum Copyright:

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und nur für die eigene Nutzung zugelassen. Kopieren und Vervielfältigen der vorliegenden Datei ist verboten! Jede Nutzung in anderen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags.

Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung vervielfältigt oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Ausgenommen von diesen Regelungen ist die **Verwendung für folgende Unterrichtszwecke:**

So dürfen Lehrkräfte die vorliegende Datei zu Unterrichtszwecken ausdrucken, mit elektronischen Projektionsverfahren (wie Laptop und Beamer) einsetzen und OHP-Folien erstellen. Verboten ist allerdings die Weitergabe der Datei auf elektronischen Datenträgern.

Verstöße werden strafrechtlich verfolgt!

© Mathematik-Verlag 2026, Mosbach

Mathematik-Verlag Rainer Hild
Steige 44-2
74821 Mosbach
Internet: <https://matheverlag.com>
E-Mail: info@matheverlag.com

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich



Aufgabe P1:

Lösungsübersicht:

Für den Flächeninhalt des Trapezes EBCF gilt: $A_{EBCF} = \frac{1}{2} (\overline{EB} + \overline{CF}) \cdot \overline{BC}$, wobei $\overline{AD} = 5,4$ cm bereits angegeben ist und $\overline{BC} = \overline{AD}$ gilt.

- Für die Länge $\overline{EB}$ gilt: $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE}$, mit $\overline{AB} = 14,5$ cm. Die Strecke $\overline{AE}$ kann im Dreieck AED mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).
- Für die Länge $\overline{CF}$ gilt: $\overline{CF} = \overline{CD} - \overline{DF}$, mit $\overline{CD} = \overline{AB} = 14,5$ cm. Die Länge $\overline{DF}$ kann im Dreieck DEF mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Länge $\overline{DE}$ und den Winkel δ_2 kennt (siehe Figur 2 und 3). Die Länge $\overline{DE}$ wiederum kann im Dreieck AED mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

Tipp: Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst im Dreieck AED die Längen $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$ berechnen und den Winkel $\delta_2 = 90^\circ - \delta_1$ eintragen.

Berechnung des Flächeninhalts des Trapezes EBCF:

Für den Flächeninhalt des Trapezes EBCF gilt (siehe Formelsammlung): $A_{EBCF} = \frac{1}{2} (\overline{EB} + \overline{CF}) \cdot \overline{BC}$.

Und mit $\overline{BC} = \overline{AD} = 5,4$ cm: $A_{EBCF} = \frac{1}{2} (\overline{EB} + \overline{CF}) \cdot 5,4$

→ Berechnung der Länge $\overline{EB}$:

Für $\overline{EB}$ gilt: $\overline{EB} = 14,5 \text{ cm} - \overline{AE}$

Die Strecke $\overline{AE}$ kann im Dreieck AED mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).

Es gilt:

$$\tan 52^\circ = \frac{\overline{AE}}{5,4} \quad | \cdot 5,4$$

$$\Leftrightarrow 6,91 = \overline{AE} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AE} = 6,91 \text{ cm}$$

Damit folgt: $\overline{EB} = 7,59 \text{ cm}$

→ Berechnung der Länge $\overline{CF}$:

Für die Länge $\overline{CF}$ gilt: $\overline{CF} = 14,5 \text{ cm} - \overline{DF}$.

Die Länge $\overline{DF}$ kann im Dreieck DEF mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Länge $\overline{DE}$ und den Winkel δ_2 kennt. Für δ_2 gilt:

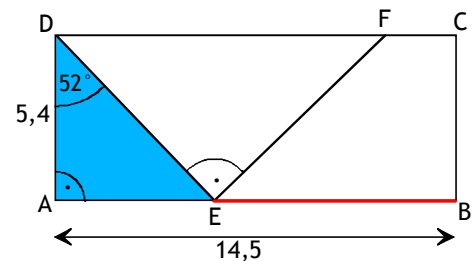
$$\delta_2 = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$$

Für $\overline{DE}$ gilt im Dreieck AED (siehe Figur 2):

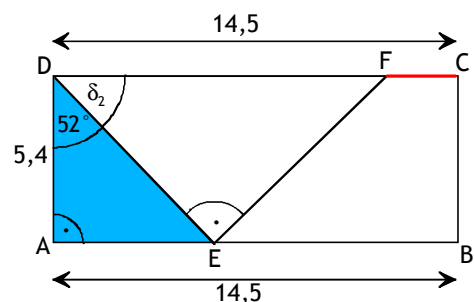
$$\cos 52^\circ = \frac{5,4}{\overline{DE}} \quad | \cdot \overline{DE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DE} \cdot \cos 52^\circ = 5,4 \quad | : \cos 52^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{DE} = 8,77 \text{ cm}$$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich



Mit $\delta_2 = 38^\circ$ und $\overline{DE} = 8,77$ cm erhält man mit der Kosinusfunktion im Dreieck DEF (s. Figur 3):

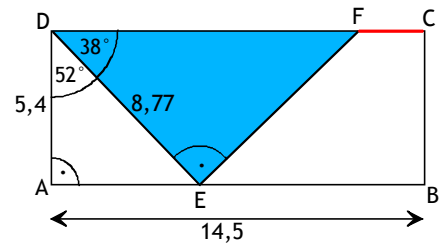
$$\cos 38^\circ = \frac{8,77}{\overline{DF}} \quad | \cdot \overline{DF}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DF} \cdot \cos 38^\circ = 8,77 \quad | : \cos 38^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{DF} = 11,13 \text{ cm}$$

Damit folgt für $\overline{CF}$:

$$\overline{CF} = 14,5 \text{ cm} - 11,13 \text{ cm} = 3,37 \text{ cm}$$



Figur 3

Einsetzen von $\overline{EB} = 7,59$ cm und $\overline{CF} = 3,37$ cm in $A_{EBCF} = \frac{1}{2} (\overline{EB} + \overline{CF}) \cdot 5,4$ ergibt schließlich:

$$A_{EBCF} = 29,6 \text{ cm}^2$$

Ergebnis: Das Trapez EBCF hat den Flächeninhalt $A_{EBCF} = 29,6 \text{ cm}^2$.

Aufgabe P2:

Lösungsübersicht:

Für die Länge $\overline{BE}$ gilt: $\overline{BE} = \overline{AB} - 9,4$ cm (siehe Figur 1). Um die Länge $\overline{AB}$ berechnen zu können, muss man im gleichschenkligen Dreieck ABC zunächst die Höhe $\overline{CF}$ bezüglich der Grundseite $\overline{AB}$ einzeichnen (siehe Figur 2). Dadurch wird das Dreieck ABC in zwei kongruente Hälften geteilt. Für $\overline{AB}$ gilt: $\overline{AB} = 2 \overline{AF}$.

Die Strecke $\overline{AF}$ kann im Dreieck AFC mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel α und die Strecke $\overline{AC}$ kennt (siehe Figur 2). Der Winkel α kann mit der Summe der Innenwinkel des Dreiecks AEC berechnet werden. $\overline{AC}$ erhält man im Dreieck AEC mit der Sinusfunktion (siehe Figur 3).

Tipp: Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst im Dreieck AEC alle Seitenlängen und den fehlenden Winkel α berechnen. Außerdem sollten Sie im gleichschenkligen Dreieck ABC die Höhe auf die Grundseite $\overline{AB}$ einzeichnen und beachten, dass diese Höhe die Grundseite $\overline{AB}$ halbiert.

Berechnung der Länge $\overline{BE}$:

Für die Länge $\overline{BE}$ gilt (siehe Figur 1): $\overline{BE} = \overline{AB} - 9,4$ cm

→ Berechnung der Länge $\overline{AB}$:

Da die Höhe $\overline{CF}$ das gleichschenklige Dreieck ABC in zwei kongruente Hälften teilt, gilt (siehe Figur 2):

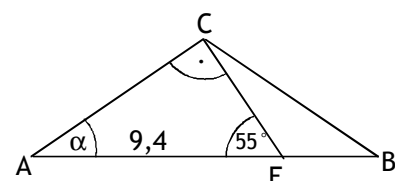
$$\overline{AB} = 2 \overline{AF}.$$

Für die Strecke $\overline{AF}$ gilt im Dreieck AFC:

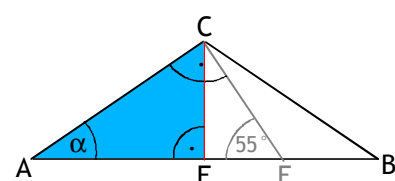
$$\cos \alpha = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$$

• Den Winkel α erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck AEC (siehe Figur 1):

$$\alpha + 55^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 35^\circ$$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich



- Die Strecke $\overline{AC}$ kann im Dreieck AEC mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Es gilt:

$$\sin 55^\circ = \frac{\overline{AC}}{9,4} \quad | \cdot 9,4$$

$$\Leftrightarrow 7,70 = \overline{AC} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AC} = \underline{7,70 \text{ cm}}$$

Einsetzen von $\alpha = 35^\circ$ und $\overline{AC} = 7,70 \text{ cm}$ in $\cos \alpha = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$ ergibt:

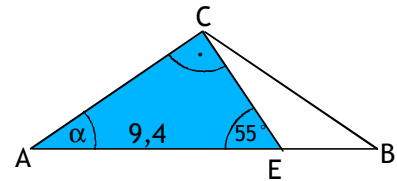
$$\cos 35^\circ = \frac{\overline{AF}}{7,70} \quad | \cdot 7,70$$

$$\Leftrightarrow 6,31 = \overline{AF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AF} = \underline{6,31 \text{ cm}}$$

Damit folgt für $\overline{AB} = 2 \overline{AF}$: $\overline{AB} = \underline{12,62 \text{ cm}}$

Und für die Länge $\overline{BE} = \overline{AB} - 9,4 \text{ cm}$ erhält man schließlich: $\overline{BE} = \underline{3,22 \text{ cm}}$

Ergebnis: Die Länge von $\overline{BE}$ ist $\underline{\overline{BE} = 3,22 \text{ cm}}$.



Figur 3

Aufgabe P3:

Lösungsübersicht:

Zunächst muss das gesamte Wasservolumen V_{Prisma} des quadratischen Prismas berechnet werden. Wenn man von diesem Volumen das Kegelvolumen abzieht, erhält man das zylinderförmige Wasservolumen V_Z , das den Zylinder oberhalb des Kegels teilweise ausfüllt. Die Summe zwischen dem Wasserstand h_0 im Zylinder und der Kegelhöhe h_{Kegel} ist dann der gesuchte Wasserstand (siehe Figur 1). Der Wasserstand h_0 im Zylinder kann durch Umstellen der entsprechenden Volumenformel für V_Z bestimmt werden. Zur Berechnung des Kegelvolumens benötigt man noch die Kegelhöhe h_{Kegel} , die mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden kann (siehe Figur 2).

Berechnung des Wasserstands im zusammengesetzten Körper:

Wenn man das gesamte Wasser des Prismas in den zusammengesetzten Körper umfüllt, gilt für die Höhe h^* des gesuchten Wasserstands (siehe Figur 1):

$h^* = h_{\text{Kegel}} + h_0$, wobei h_0 der Wasserstand im Zylinder nach dem Umfüllen ist.

→ Berechnung der Kegelhöhe h_{Kegel} :

Die Kegelhöhe h_{Kegel} kann im markierten Dreieck der Figur 2 berechnet werden. Darin gilt der Satz des Pythagoras:

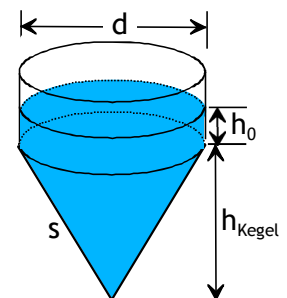
$$(0,5d)^2 + h_{\text{Kegel}}^2 = s^2$$

Mit $d = 17,8 \text{ cm}$ und $s = 20,0 \text{ cm}$ folgt:

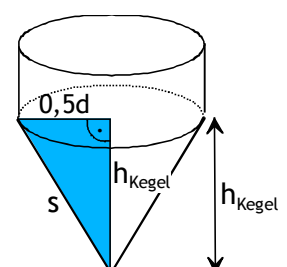
$$79,21 + h_{\text{Kegel}}^2 = 400 \quad | -79,21$$

$$\Leftrightarrow h_{\text{Kegel}}^2 = 320,79 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \underline{h_{\text{Kegel}} = 17,91 \text{ cm}}$$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich



→ Berechnung des Wasserstands h_0 im Zylinder:

Für das gesamte Wasservolumen V_{Prisma} gilt (siehe Formelsammlung):
 $V_{\text{Prisma}} = a^2 \cdot h_{\text{Pr}}$

Mit $a = 10 \text{ cm}$ und $h_{\text{Pr}} = 25 \text{ cm}$ erhält man: $V_{\text{Prisma}} = 2500 \text{ cm}^3$

Nach dem Umfüllen des Wassers gilt für das Wasservolumen V_Z im Zylinder: $V_Z = \pi \cdot (0,5d)^2 \cdot h_0$

Mit $d = 17,8 \text{ cm}$ erhält man: $V_Z = 248,85 \cdot h_0$

Außerdem gilt für das Wasservolumen V_Z nach dem Umfüllen:

$$V_Z = V_{\text{Prisma}} - V_{\text{Kegel}} \quad \text{bzw.} \quad V_Z = 2500 \text{ cm}^3 - V_{\text{Kegel}}$$

• Für das Kegelvolumen V_{Kegel} gilt (siehe Formelsammlung):

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot (0,5d)^2 \cdot h_{\text{Kegel}}$$

Mit $d = 17,8 \text{ cm}$ und $h_{\text{Kegel}} = 17,91 \text{ cm}$ (siehe oben) folgt:

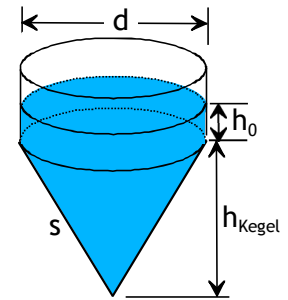
$$V_{\text{Kegel}} = 1485,6 \text{ cm}^3$$

Einsetzen in $V_Z = 2500 \text{ cm}^3 - V_{\text{Kegel}}$ ergibt: $V_Z = 1014,4 \text{ cm}^3$

Einsetzen von $V_Z = 1014,4 \text{ cm}^3$ in $V_Z = 248,85 \cdot h_0$ ergibt:

$$1014,4 = 248,85 \cdot h_0 \quad | :248,85$$

$$\Leftrightarrow 4,08 = h_0 \quad \text{bzw.} \quad h_0 = 4,08 \text{ cm}$$



Figur 3

Einsetzen von $h_{\text{Kegel}} = 17,91 \text{ cm}$ und $h_0 = 4,08 \text{ cm}$ in $h^* = h_{\text{Kegel}} + h_0$ ergibt schließlich die gesuchte Höhe des Wassers im zusammengesetzten Körper: $h^* = 21,99 \text{ cm} \approx 22,0 \text{ cm}$

Ergebnis: Die Höhe des Wassers im zusammengesetzten Körper beträgt $h^* \approx 22,0 \text{ cm}$.

Aufgabe P4:

Prozentuale Abnahme des Wasserverbrauchs zwischen 1990 und 2010:

Im Jahr 1990 betrug der Pro-Kopf-Wasserverbrauch 147 Liter pro Tag. Das ist der Grundwert G . Im Jahr 2010 waren es nur noch 122 Liter pro Tag. Das ist der verringerte Grundwert G_- .

Einsetzen von $G = 147 \text{ Liter}$ und $G_- = 122 \text{ Liter}$ in die Formel $G_- = G \cdot q_-$ ergibt:

$$122 = 147 \cdot q_- \quad | :147$$

$$\Leftrightarrow 0,83 = q_- \quad \text{bzw.} \quad q_- = 0,83$$

Mit $q_- = 1 - \frac{p}{100}$ folgt: $p \% = 17,0 \%$

Ergebnis: Der Pro-Kopf-Wasserverbrauch hat zwischen 1990 und 2010 um 17,0 % abgenommen.

Der tägliche Wasserverbrauch für die Körperpflege im Jahr 2015:

Im Jahr 2015 betrug der Pro-Kopf-Wasserverbrauch 122 Liter pro Tag. Das ist der Grundwert G . Der Grafik zufolge entfallen 35 % davon auf die Körperpflege. Das ist der Prozentsatz $p \%$. Gesucht ist also der Prozentwert W ; nämlich 35 % von 122 Liter. Man erhält:

$$W = \frac{35}{100} \cdot 122 \text{ Liter} = 42,7 \text{ Liter}$$

Ergebnis: Im Jahr 2015 wurden täglich 42,7 Liter Wasser pro Einwohner für die Körperpflege verbraucht.

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich



Der vorhergesagte, tägliche Wasserverbrauch im Jahr 2020:

Im Jahr 2015 war der tägliche Wasserverbrauch 122 Liter pro Einwohner. Das ist der Grundwert G . Die jährliche Verringerungsrate von 1 % entspricht dem Verringerungsfaktor $q_- = 0,99$ (wegen $q_- = 1 - \frac{p}{100}$).

Die Anzahl der Jahre ist $n = 5$.

Mit der Formel $G_- = G \cdot q_-^n$ erhält man somit: $G_- = 122 \cdot 0,99^5 = 116,02$ Liter.

Ergebnis:

Im Jahr 2020 kann man mit einem täglichen Wasserverbrauch von 116,02 Litern pro Kopf rechnen.

Aufgabe P5:

Definitionsmenge und Lösungsmenge der Gleichung:

- Zur **Definitionsmenge** gehören alle $x \in \mathbb{R}$ außer diejenigen x -Werte, für die ein oder mehrere Nenner der Bruchgleichung 0 werden. Man muss also prüfen, für welche x -Werte die einzelnen Nenner 0 werden:

Der erste Nenner „ x “ wird 0 für $x = 0$. Der zweite Nenner „ $x + 2$ “ wird 0 für $x = -2$.

Um zu erkennen, wann der dritte Nenner $x^2 + 2x = 0$ wird, sollte man ihn als Produkt schreiben:

$x^2 + 2x = x \cdot (x + 2)$. Da ein Produkt immer dann 0 wird, wenn einer der Faktoren 0 wird, wird der dritte Nenner 0 für $x = 0$ und $x = -2$.

Es müssen also die Werte $x = 0$ und $x = -2$ aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.

Ergebnis: Die Definitionsmenge der Gleichung ist $ID = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$.

- Zur Berechnung der **Lösungsmenge** muss man die Gleichung $\frac{4}{x} + \frac{2x-2}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2+2x}$ zuerst mithilfe des Hauptnenners (HN) nennerfrei machen.

Welches der Hauptnenner ist, erkennt man, indem man den dritten Nenner durch Ausklammern von

„ x “ als Produkt schreibt: $\frac{4}{x} + \frac{2x-2}{x+2} = \frac{3x^2}{x \cdot (x+2)}$

Der Hauptnenner ist also $HN = x \cdot (x + 2)$. Durch Erweitern aller Brüche auf $HN = x \cdot (x + 2)$ erhält man:

$$\frac{4 \cdot (x+2)}{x \cdot (x+2)} + \frac{x \cdot (2x-2)}{x \cdot (x+2)} = \frac{3x^2}{x \cdot (x+2)} \quad | \cdot x(x+2) \quad (\text{Dadurch fallen alle Nenner weg.})$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (x+2) + x \cdot (2x-2) = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x + 8 + 2x^2 - 2x = 3x^2 \quad | -3x^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \quad | :(-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

Mit der Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man: $x_1 = 1 + \sqrt{(1)^2 + 8} = 4$ und $x_2 = 1 - \sqrt{(1)^2 + 8} = -2$

Beachte: Da $x_2 = -2$ nicht in der Definitionsmenge ist (siehe oben), ist nur $x_1 = 4$ eine Lösung.

Ergebnis: Die Lösungsmenge der Gleichung ist $IL = \{4\}$.

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich



Aufgabe P6:

Die Funktionsgleichung der Parabel:

Der Tabelle entnimmt man, dass die Parabel p durch die Punkte $A(0|5)$ und $B(6|5)$ verläuft. Durch Einsetzen der Koordinaten von $A(0|5)$ und $B(6|5)$ in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\text{Mit } A(0|5): \quad 5 = 0^2 + b \cdot (0) + c \Leftrightarrow 5 = c \text{ bzw. } c = 5 \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit } B(6|5): \quad 5 = 6^2 + b \cdot 6 + c \Leftrightarrow 5 = 36 + 6b + c \quad (\text{II})$$

Einsetzen von $c = 5$ in Gleichung (II) $5 = 36 + 6b + c$ ergibt:

$$5 = 36 + 6b + 5 \quad | -5$$

$$\Leftrightarrow 0 = 36 + 6b \quad | -36$$

$$\Leftrightarrow -36 = 6b \quad | :6$$

$$\Leftrightarrow -6 = b \text{ bzw. } b = -6$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Parabel p lautet also $p: y = x^2 - 6x + 5$.

Die fehlenden Werte in der Tabelle:

In der Tabelle fehlen noch die y -Werte zu den x -Werten 1, 2, 3, 4 und 5. Einsetzen dieser x -Werte in die Funktionsgleichung $y = x^2 - 6x + 5$ ergibt:

$$x = 1: \quad y = 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0$$

$$x = 2: \quad y = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3$$

$$x = 3: \quad y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$$

$$x = 4: \quad y = 4^2 - 6 \cdot 4 + 5 = -3$$

$$x = 5: \quad y = 5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 0$$

Damit lautet die ergänzte Tabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Die Steigung der Geraden g:

Wenn man die Koordinaten der Punkte R und S kennt, kann man mit der Zwei-Punkte-Form (siehe Formelsammlung) die Steigung m der Geraden g bestimmen.

→ Bestimmen des Schnittpunkts R von p mit der y -Achse:

Die x -Koordinate von R ist $x = 0$, da R auf der y -Achse liegen soll. Einsetzen in die Parabelgleichung $y = x^2 - 6x + 5$ ergibt:

$$y = 0^2 - 6 \cdot (0) + 5 = 5.$$

Somit ist $R(0|5)$.

(siehe auch Wertetabelle oben)

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich



→ Bestimmen des Scheitelpunkts S von p:

Mithilfe einer quadratischen Ergänzung muss die Parabelgleichung in die Scheitelform umgewandelt werden. Daran kann man dann die Koordinaten von S ablesen:

$$y = x^2 - 6x + 5$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 6x + \mathbf{3^2} + 5 - \mathbf{3^2} \quad | \text{Anwenden der zweiten binomischen Formel}$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 3)^2 + 5 - 9$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 3)^2 - 4. \quad \text{Damit ist der Scheitelpunkt } \mathbf{S(3 | -4)}.$$

Einsetzen der Koordinaten von R(0|5) und S(3|-4) in die Zwei-Punkte-Form $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ergibt mit

$$y_1 = 5, y_2 = -4, x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 3: \quad m = \frac{-4 - 5}{3 - 0} = \frac{-9}{3} = -3$$

Ergebnis: Die Steigung der Geraden g ist $m = -3$.

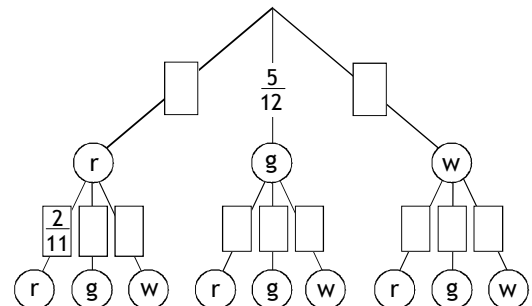
Aufgabe P7:

Das vollständige Baumdiagramm:

Das gleichzeitige Ziehen von zwei Gummibärchen entspricht einem Ziehen von zwei Gummibärchen *ohne* Zurücklegen. (Denn streng genommen, kann man nie zwei Gegenstände genau *gleichzeitig* in die Hand nehmen.)

Aus der im Baumdiagramm angegebenen Wahrscheinlichkeit

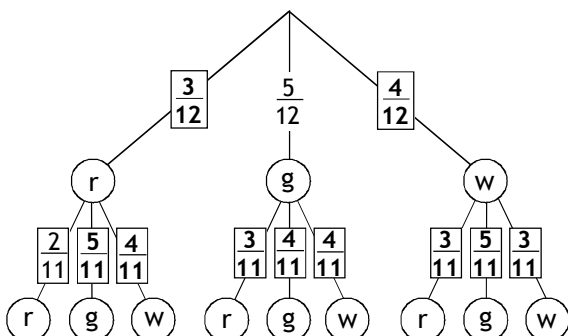
$p(g) = \frac{5}{12}$ folgt, dass von den ursprünglich 12 Gummibärchen **5 Gummibärchen grün** sind.



Wenn man im Baumdiagramm dem Pfad folgt, bei dem zwei rote Gummibärchen gezogen werden, erkennt man an der Wahrscheinlichkeit $p_2(r) = \frac{2}{11}$, dass beim zweiten Zug nur noch 2 rote Gummibärchen in der Schale sind. Da beim ersten Zug ein rotes Gummibärchen gezogen wurde, müssen ursprünglich also **3 rote Gummibärchen** in der Schale gewesen sein.

Damit folgt, dass ursprünglich $12 - (5 + 3) = 4$ **weiße Gummibärchen** in der Schale sind.

Wenn man dann noch beachtet, dass beim zweiten Zug nur noch 11 Gummibärchen in der Schale sind und das jeweils zuerst gezogene Gummibärchen fehlt, erhält man das vollständige Baumdiagramm:



Tipp: Die Summe der Wahrscheinlichkeit, die von einem Knotenpunkt ausgehen, muss immer "1" sein.

$$\text{Z.B.:} \quad \frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich



Die Wahrscheinlichkeit für „genau ein rotes Gummibärchen“ und für „höchstens ein weißes Gummibärchen“:

- Das Ereignis „genau ein rotes Gummibärchen“ tritt bei den Ergebnissen (r; g), (r; w), (g; r) und (w; r) ein (siehe grau markierte Pfade im Baumdiagramm).

Mit der Produktregel erhält man:

$$P(r; g) = \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{15}{132}; \quad P(r; w) = \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{12}{132};$$

$$P(g; r) = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{15}{132}; \quad P(w; r) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132}.$$

Mit der Summenregel folgt:

$$P(\text{genau ein rotes Gummibärchen}) = \frac{15}{132} + \frac{12}{132} + \frac{15}{132} + \frac{12}{132} = \frac{54}{132} = 40,9 \%$$

- Das Ereignis „höchstens ein weißes Gummibärchen“ kann eleganter über das Gegenereignis „zwei weiße Gummibärchen“ (w; w) berechnet werden. Es gilt:

$$P(\text{höchstens ein weißes Gummibärchen}) = 1 - P(w; w)$$

Mit der Produktregel erhält man (siehe grau markierten

$$\text{Pfad im Baumdiagramm rechts): } P(w; w) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132}$$

Damit folgt:

$$P(\text{höchstens ein weißes Gummibärchen}) = 1 - \frac{12}{132} = \frac{120}{132} = 90,9 \%$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Antonetta „genau ein rotes Gummibärchen“ zieht, ist

$$P(\text{genau ein rotes Gummibärchen}) = \frac{54}{132} = 40,9 \%$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Antonetta „höchstens ein weißes Gummibärchen“ zieht, ist

$$P(\text{höchstens ein weißes Gummibärchen}) = \frac{120}{132} = 90,9 \%$$

Aufgabe P8:

Zuordnung der Boxplots:

Als einziges Kriterium zur Zuordnung der Boxplots eignet sich jeweils das obere Quartil, da beide Boxplots das gleiche untere Quartil (22 m) haben und die Extremwerte $x_{\min}$ und $x_{\max}$ in den Ranglisten nicht angegeben sind.

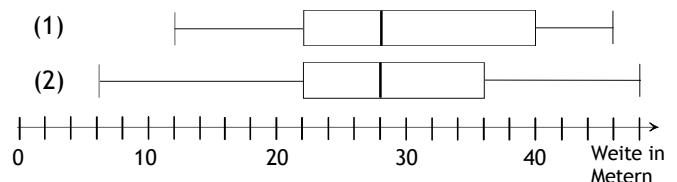
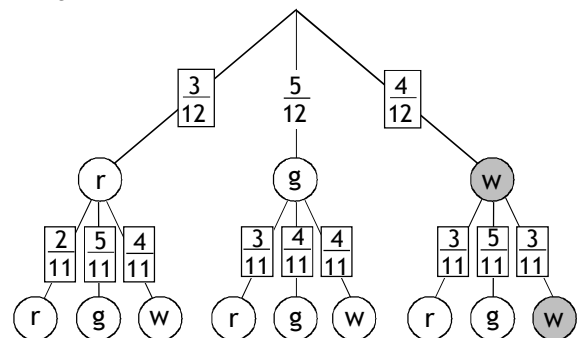
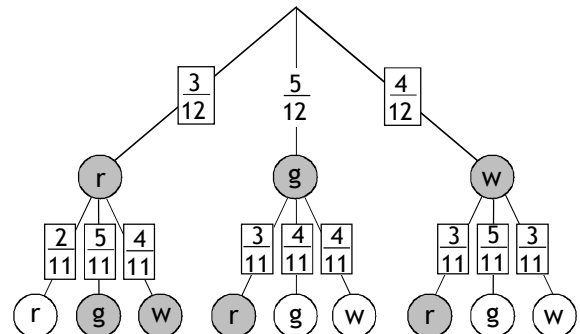
Im Boxplot (1) ist $q_{0,1} = 40$ m. Im Boxplot (2) ist $q_{0,2} = 36$ m.

Den Platz des oberen Quartils in der jeweiligen Rangliste erhält man mit der Formel $n \cdot \frac{3}{4}$.

Bei Klasse 7a ist $n = 17$. Wegen $17 \cdot \frac{3}{4} = 12,75$ muss man den 13. Platz betrachten: $q_0(7a) = 40$ m

Bei Klasse 7b ist $n = 13$. Wegen $13 \cdot \frac{3}{4} = 9,75$ muss man den 10. Platz betrachten: $q_0(7b) = 36$ m

Ergebnis: Der **Boxplot (1)** gehört zu Klasse 7a. Der **Boxplot (2)** gehört zu Klasse 7b.



Lösungen zur Prüfung 2018: Pflichtbereich



Ergänzung der Ranglisten mit möglichen Werten:

- Im Boxplot der Klasse 7a ist $x_{\min} = 12$ m und $x_{\max} = 46$ m. Das untere Quartil ist $q_u(7a) = 22$.

Wegen $17 \cdot \frac{1}{4} = 4,25$ muss das untere Quartil beim **5. Platz** der Rangliste von Klasse 7a liegen.

Man kann daher die Rangliste von Klasse 7a mit folgenden Werten ergänzen:

Platz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Kl. 7a	12				22	23	25	28	28	35	36	38	40				46

Die Plätze 2, 3 und 4 können demnach Werte von 12 m bis 22 m in aufsteigender Reihenfolge haben. Für die Plätze 14, 15 und 16 kommen Werte von 40 m bis 46 m in Frage; ebenfalls in aufsteigender Reihenfolge.

- Im Boxplot der Klasse 7b ist $x_{\min} = 6$ m und $x_{\max} = 48$ m. Das untere Quartil ist $q_u(7b) = 22$.

Wegen $13 \cdot \frac{1}{4} = 3,25$ muss das untere Quartil beim **4. Platz** der Rangliste von Klasse 7b liegen. Man

kann daher die Rangliste von Klasse 7b mit folgenden Werten ergänzen:

Platz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Kl. 7b	6			22	24	25	28	28	29	36	38	40	48

Für die Plätze 2 und 3 kommen Werte von 6 m bis 22 m in aufsteigender Reihenfolge in Frage.

Überprüfung der Behauptung von Alex:

Wenn die Weiten von Tom und Max (23 m und 36 m) aus der Wertung genommen werden, sieht die neue Rangliste der Klasse 7a so aus:

Streichen der Werte 23 m und 36 m und gleichzeitiges Korrigieren der Platznummerierung:

Platz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Kl. 7a	12				22	23	25	28	28	35	36	38	40		46

Neue Rangliste der Klasse 7a:

Platz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Kl. 7a	12				22	25	28	28	35	38	40				46

Wegen $15 \cdot \frac{1}{2} = 7,5$ muss der Zentralwert der neuen Rangliste beim **8. Platz** liegen. Also ist $z_{\text{neu}} = 28$ m.

Wie man dem Boxplot (1) entnimmt, war der ursprüngliche Zentralwert ebenfalls $z = 28$ m.

Ergebnis: Alex hat also Recht.

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1a:

Lösungsübersicht:

- Zunächst sollte man die Höhe $h = \overline{CE}$ bezüglich der Grundseite $\overline{AB}$ einzeichnen (siehe Figur 1). Der Winkel α kann dann mit der Tangensfunktion im Dreieck AEC berechnet werden, wenn man die Höhe h und die Strecke $\overline{AE}$ kennt. Die Höhe h kann mit $A_{ABC} = 54,0 \text{ cm}^2$, der Strecke $\overline{AB} = 12,0 \text{ cm}$ und der Formel $A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h$ berechnet werden. Für die Strecke $\overline{AE}$ gilt: $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE}$, mit $\overline{AB} = 12,0 \text{ cm}$. Die Strecke $\overline{BE}$ kann im Dreieck BCE mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 2).
- Der Abstand $\overline{DF}$ des Punktes D zur Strecke $\overline{AB}$ kann im Dreieck BDF mit der Sinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel β und die Strecke $\overline{BD}$ kennt (siehe Figur 3). Den Winkel β erhält man im Dreieck BCE mit der Sinusfunktion (siehe Figur 4). Die Strecke $\overline{BD}$ kann im Dreieck ABD mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 5).

Tipp: Wenn Sie die Höhe $h = \overline{CE}$ eingezeichnet und mit der Flächenformel berechnet haben und dann trotzdem keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie im Dreieck BCE zunächst alle fehlenden Größen berechnen (siehe Figur 2).

Berechnung des Winkels α :

Für den Winkel α gilt im Dreieck AEC (siehe Figur 1): $\tan \alpha = \frac{h}{\overline{AE}}$

→ Berechnung der Höhe h :

Die Höhe h kann mit $A_{ABC} = 54,0 \text{ cm}^2$ und der Strecke $\overline{AB} = 12,0 \text{ cm}$ berechnet werden. Einsetzen in

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h \text{ (siehe Formelsammlung) ergibt:}$$

$$54,0 = \frac{1}{2} \cdot 12,0 \cdot h$$

$$\Leftrightarrow 54,0 = 6,0 \cdot h \quad | :6,0$$

$$\Leftrightarrow 9,0 = h \text{ bzw. } \underline{h = 9,0 \text{ cm}}$$

→ Berechnung der Strecke $\overline{AE}$:

Für die Strecke $\overline{AE}$ gilt: $\overline{AE} = 12,0 \text{ cm} - \overline{BE}$ (siehe Figur 2).

Die Strecke $\overline{BE}$ kann im Dreieck BCE mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Es gilt:

$$\overline{BE}^2 + 9,0^2 = 11,6^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE}^2 + 81 = 134,56 \quad | -81$$

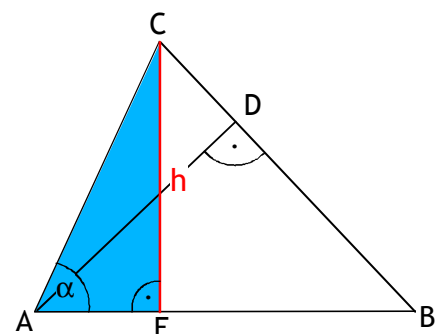
$$\Leftrightarrow \overline{BE}^2 = 53,56 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE} = 7,3 \text{ cm}$$

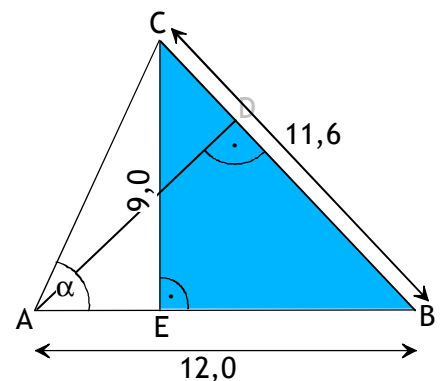
Damit erhält man: $\overline{AE} = 12,0 \text{ cm} - 7,3 \text{ cm} = \underline{4,7 \text{ cm}}$

Einsetzen von $h = 9,0 \text{ cm}$ und $\overline{AE} = 4,7 \text{ cm}$ in $\tan \alpha = \frac{h}{\overline{AE}}$ ergibt: $\tan \alpha = 1,91 \Rightarrow \alpha = 62,4^\circ$

Ergebnis: Der Winkel α beträgt $\alpha = 62,4^\circ$.



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W1



Berechnung des Abstands des Punktes D zur Strecke AB:

Für den Abstand $\overline{DF}$ des Punktes D zur Strecke $\overline{AB}$ gilt im Dreieck BDF (siehe Figur 3):

$$\sin \beta = \frac{\overline{DF}}{\overline{BD}} \quad | \cdot \overline{BD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} \cdot \sin \beta = \overline{DF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{DF} = \overline{BD} \cdot \sin \beta$$

→ Berechnung des Winkels β :

Im Dreieck BCE gilt (siehe Figur 4):

$$\sin \beta = \frac{9,0}{11,6}$$

$$\Leftrightarrow \sin \beta = 0,776 \Rightarrow \beta = 50,9^\circ$$

→ Berechnung der Strecke $\overline{BD}$:

Für die Strecke $\overline{BD}$ gilt im Dreieck ABD (siehe Figur 5):

$$\cos 50,9^\circ = \frac{\overline{BD}}{12,0} \quad | \cdot 12,0$$

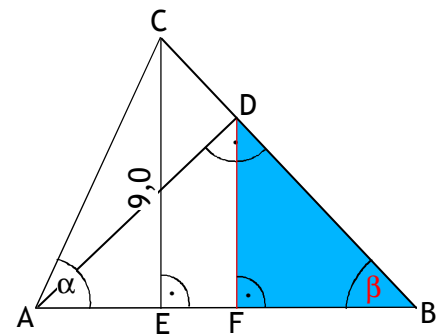
$$\Leftrightarrow 7,6 = \overline{BD} \quad \text{bzw.} \quad \overline{BD} = 7,6 \text{ cm}$$

Einsetzen von $\beta = 50,9^\circ$ und $\overline{BD} = 7,6 \text{ cm}$ in $\overline{DF} = \overline{BD} \cdot \sin \beta$ ergibt schließlich:

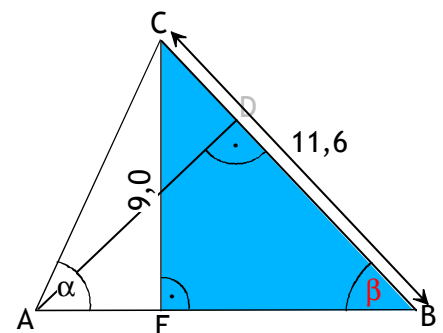
$$\overline{DF} = 5,9 \text{ cm}$$

Ergebnis:

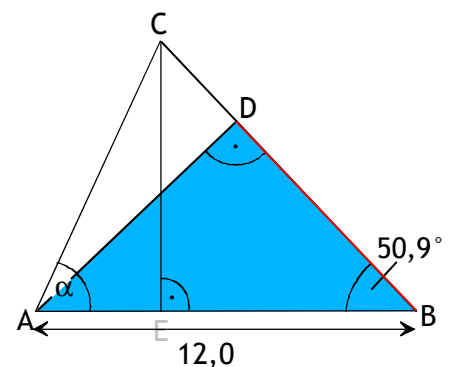
Der Abstand des Punktes D zur Strecke $\overline{AB}$ beträgt 5,9 cm.



Figur 3



Figur 4



Figur 5

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1b:

Lösungsübersicht:

- Um zu zeigen, dass die Dreiecke ADC und DBC flächengleich sind, sollte man zunächst alle Innenwinkel der Dreiecke ADC und DBC berechnen und die Höhe h von C auf die Grundseite $\overline{AB}$ eintragen (siehe Figur 1). (Zur Erinnerung: In einem gleichseitigen Dreieck betragen alle Innenwinkel 60° .)
Mithilfe dieser Innenwinkel erkennt man, dass das Dreieck ADC gleichschenkelig ist mit $\overline{AD} = \overline{CD}$ (siehe Figur 1). Daraus folgt, dass die Dreiecke ADC und DBC gleichlange Grundseiten und die gleiche Höhe haben und somit flächengleich sind. Selbstverständlich kann man die Flächeninhalte beider Dreiecke auch in Abhängigkeit von e bestimmen. Dies ist allerdings wesentlich aufwendiger.
- Der Flächeninhalt $A_{ABC} = 200 \text{ cm}^2$ kann mit den Katheten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC in Abhängigkeit von e bestimmt werden: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AC}$, mit $\overline{AC} = 4e\sqrt{3}$. Die Strecke $\overline{BC}$ kann im Dreieck ABC mit der Tangensfunktion in Abhängigkeit von e bestimmt werden (siehe Figur 2), wenn man den Winkel α kennt. Den Winkel α erhält man über die Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC (siehe Figur 1).

Nachweis, dass die Dreiecke ADC und DBC flächengleich sind:

Wenn man alle Innenwinkel der Dreiecke ADC und DBC bestimmt, kann man den Nachweis allein durch Argumentieren vollbringen, ohne die Flächeninhalte dieser Dreiecke berechnen zu müssen:

Die Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck DBC sind jeweils 60° (siehe Formelsammlung).

Für den Winkel γ_1 gilt (siehe Figur 1): $\gamma_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Den Winkel α erhält man aus der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC. Es gilt: $\alpha + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ$

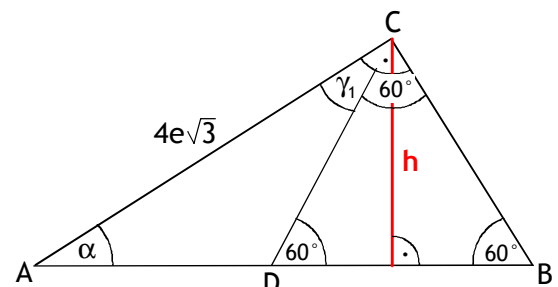
Wegen $\alpha = \gamma_1$ ist das Dreieck ADC gleichschenkelig mit $\overline{AD} = \overline{CD}$.

Im gleichseitigen Dreieck DBC gilt $\overline{CD} = \overline{BD}$. Und mit $\overline{AD} = \overline{CD}$ folgt: $\overline{AD} = \overline{BD}$.

Die Seite $\overline{AD}$ kann nun als **Grundseite** g des Dreiecks ADC mit der Höhe h betrachtet werden. (Man beachte, dass die Höhe h außerhalb des stumpfen Dreiecks ADC liegt.)

Im Dreieck DBC kann man die Seite $\overline{BD}$ als Grundseite g mit der **gleichen** Höhe h betrachten.

Wegen $\overline{AD} = \overline{BD}$ und der allgemeinen Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks $A_D = \frac{1}{2} g \cdot h$ müssen die Dreiecke ADC und DBC flächengleich sein. **Was zu zeigen war.**



Figur 1

Hinweis:

Man kann die Flächeninhalte beider Dreiecke ADC und DBC auch in Abhängigkeit von e *berechnen*. Zur Berechnung des Flächeninhalts des gleichseitigen Dreiecks DBC benötigt man die Länge einer Seite. Zum Beispiel die Strecke $\overline{BC}$, die mit der Tangensfunktion im Dreieck ABC berechnet werden kann. Man erhält $\overline{BC} = 4e$. Den Flächeninhalt

des gleichseitigen Dreiecks DBC kann man mit der Formel $A_{DBC} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$ berechnen (siehe Formelsammlung).

Mit $a = \overline{BC} = 4e$ erhält man: $A_{DBC} = 4e^2 \cdot \sqrt{3}$. Mit $\overline{BC} = 4e$ und $\overline{AC} = 4e\sqrt{3}$ erhält man für $A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AC}$:

$A_{ABC} = 8e^2 \cdot \sqrt{3}$. Und wegen $A_{ADC} = A_{ABC} - A_{DBC} = 4e^2 \cdot \sqrt{3}$ folgt dann $A_{ADC} = A_{DBC}$.

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W1



Der Wert von e, für den der Flächeninhalt $A_{ABC} = 200 \text{ cm}^2$ beträgt:

Für den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC gilt:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AC}$$

Mit $\overline{AC} = 4e\sqrt{3}$ folgt: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot 4e\sqrt{3} = 2e\sqrt{3} \cdot \overline{BC}$

(Hinweis: Den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks kann man einfach mit den beiden Katheten berechnen, indem man die eine Kathete als Grundseite und die andere Kathete als Höhe betrachtet.)

Die Strecke $\overline{BC}$ kann mit der Tangensfunktion im Dreieck ABC berechnet werden (siehe Figur 2). Es gilt:

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{BC}}{4e\sqrt{3}}$$

Mit $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (siehe Formelsammlung) folgt:

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\overline{BC}}{4e\sqrt{3}} \quad | \cdot 4e\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot 4e\sqrt{3} = \overline{BC} \quad | \text{ (Man beachte: } \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \text{ und } \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.)$$

$$\Leftrightarrow 4e = \overline{BC} \text{ bzw. } \overline{BC} = 4e$$

Einsetzen von $\overline{BC} = 4e$ in $A_{ABC} = 2e\sqrt{3} \cdot \overline{BC}$ ergibt:

$$A_{ABC} = 2e\sqrt{3} \cdot 4e = 8e^2 \cdot \sqrt{3}$$

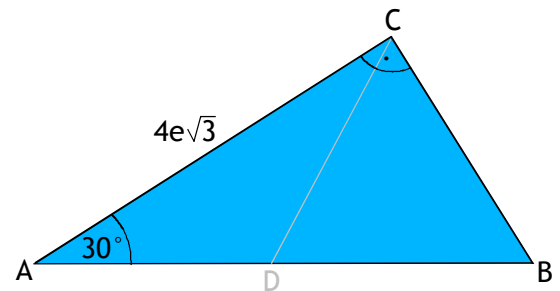
Weil der Flächeninhalt des Dreiecks ABC 200 cm^2 betragen soll, muss gelten:

$$200 = 8e^2 \cdot \sqrt{3} \quad | : (8\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow 14,43 = e^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Rightarrow 3,8 = e \text{ bzw. } e = 3,8 \text{ cm}$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt 200 cm^2 für $e = 3,8 \text{ cm}$.



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W2



Aufgabe W2a:

Lösungsübersicht:

Für das Pyramidenvolumen gilt: $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} G \cdot h$, mit der Grundfläche G und der Höhe h .

- Die **Pyramidenhöhe** h ist identisch mit der Kegelhöhe und kann mit $V_{\text{Kegel}} = 500 \text{ cm}^3$ und $d = 13,0 \text{ cm}$ berechnet werden, indem man $V_{\text{Kegel}} = 500 \text{ cm}^3$ und $r = 6,5 \text{ cm}$ in die Volumenformel eines Kegels einsetzt (siehe Formelsammlung).
- Die **Grundfläche** G der achtseitigen Pyramide besteht aus 8 gleichschenkligen Dreiecken mit der Schenkellänge $r = 0,5 \cdot d_{\text{Kegel}} = 6,5 \text{ cm}$. Der Innenwinkel an der Dreiecksspitze beträgt $360^\circ : 8 = 45^\circ$ (siehe Figur 2). Mithilfe dieses Innenwinkels und der Schenkellänge $r = 6,5 \text{ cm}$ kann der Flächeninhalt eines dieser Dreiecke und damit die gesamte Grundfläche G berechnet werden (siehe Figur 2).

Berechnung des Pyramidenvolumens:

Für das Pyramidenvolumen gilt: $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} G \cdot h$, mit der Grundfläche G und der Höhe h .

→ Berechnung der Höhe h :

Die Höhe h kann mit $V_{\text{Kegel}} = 500 \text{ cm}^3$ und $d = 13,0 \text{ cm}$

berechnet werden. Es gilt: $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$

Mit $V_{\text{Kegel}} = 500 \text{ cm}^3$, $d = 13,0 \text{ cm}$ und $r = 0,5d = 6,5 \text{ cm}$ folgt:

$$500 = \frac{1}{3} \pi \cdot 6,5^2 \cdot h$$

$$\Leftrightarrow 500 = 44,24 \cdot h \quad | : 44,24$$

$$\Leftrightarrow 11,30 = h \text{ bzw. } h = 11,30 \text{ cm}$$

→ Berechnung der Grundfläche G :

Die Grundfläche der regelmäßigen achtseitigen Pyramide besteht aus 8 gleichschenkligen Dreiecken PTM (siehe Figur 2).

Es gilt: $G = 8 \cdot A_{\text{PTM}}$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks PTM gilt (siehe Figur 2):

$$A_{\text{PTM}} = \frac{1}{2} \overline{PT} \cdot h_a$$

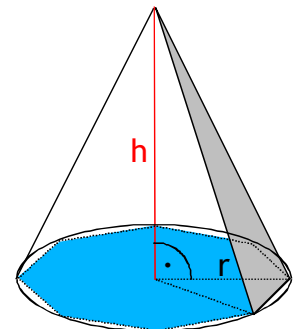
Die Strecke $\overline{PT}$ und die Dreieckshöhe h_a können in dem markierten rechtwinkligen Dreieck der Figur 2 berechnet werden. (Man beachte, dass die Höhe h_a das gleichschenklige Dreieck PTM in zwei kongruente Hälften teilt und dass $\alpha = 360^\circ : 8 = 45^\circ$ ist.) Es gilt:

$$\cos 22,5^\circ = \frac{h_a}{6,5} \quad | \cdot 6,5$$

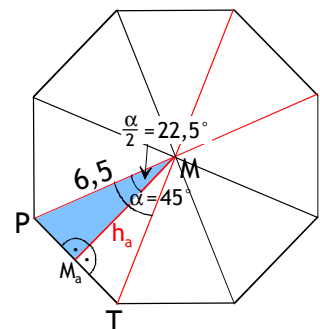
$$\Leftrightarrow 6,01 = h_a \text{ bzw. } h_a = 6,01 \text{ cm}$$

Die Strecke $\overline{PM_a} = 0,5 \overline{PT}$ kann mit der Sinusfunktion berechnet werden. Es gilt:

$$\sin 22,5^\circ = \frac{0,5 \cdot \overline{PT}}{6,5} \quad | \cdot 6,5$$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W2



$$\Leftrightarrow 2,49 = 0,5 \overline{PT} \quad | : 0,5$$

$$\Leftrightarrow 4,98 = \overline{PT} \quad \text{bzw.} \quad \overline{PT} = \underline{4,98 \text{ cm}}$$

Mit $h_a = 6,01 \text{ cm}$ und $\overline{PT} = 4,98 \text{ cm}$ erhält man für $A_{\text{PTM}} = \frac{1}{2} \overline{PT} \cdot h_a$:

$$A_{\text{PTM}} = 14,96 \text{ cm}^2$$

$$\text{Und für } G = 8 \cdot A_{\text{PTM}} \text{ folgt: } \underline{G = 119,68 \text{ cm}^2}$$

Mit $h = 11,30 \text{ cm}$ (siehe oben) erhält man schließlich für das Pyramidenvolumen $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} G \cdot h$:

$$\underline{V_{\text{Pyr}} = 450,8 \text{ cm}^3}$$

Ergebnis: Das Volumen der entstehenden Pyramide beträgt $\underline{V_{\text{Pyr}} = 450,8 \text{ cm}^3}$.

Aufgabe W2b:

Lösungsübersicht:

Die Höhe h_p der quadratischen Pyramide kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Höhe h_a einer Seitenfläche und die Grundkante a kennt (siehe Figur 1). Die Seitenhöhe h_a und die Grundkante a können im rechtwinkligen Dreieck der Figur 2 berechnet werden, wenn man die Seitenkante s und den Winkel α kennt. Die Seitenkante s wiederum kann in dem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundseite $b = 20 \text{ cm}$ und dem Innenwinkel $\varepsilon = 140^\circ$ berechnet werden (siehe Figur 3).

Tip: Wenn man überhaupt keinen Lösungsansatz erkennt, sollte man in dem gleichschenkligen Dreieck mit $b = 20 \text{ cm}$ und $\varepsilon = 140^\circ$ die Höhe bezüglich der Grundseite b einzeichnen (siehe Figur 3). Weil diese Höhe das gleichschenklige Dreieck halbiert, kann man in einer der beiden Hälften die Strecke s berechnen. Den Winkel α kann man mit der Winkelsumme des Vollkreises berechnen (siehe Figur 2).

Berechnung der Höhe der quadratischen Pyramide:

Die Höhe h_p der quadratischen Pyramide kann mit dem Satz des Pythagoras im markierten Dreieck der Figur 1 berechnet werden. Es gilt:

$$h_p^2 + (0,5a)^2 = h_a^2$$

Die Grundkante a und die Höhe h_a einer Seitenfläche können in dem angegebenen Netz berechnet werden.

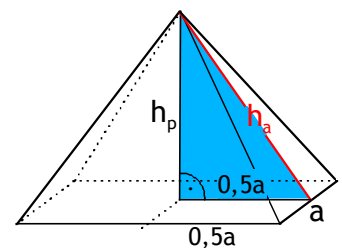
→ Berechnung der Höhe h_a :

Im markierten Dreieck der Figur 2 gilt: $\sin \alpha = \frac{h_a}{s}$

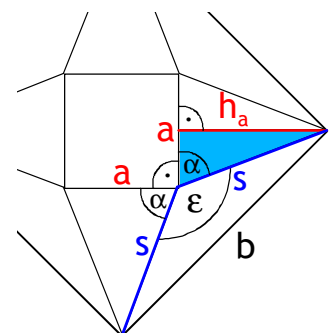
Der Winkel α kann mit der Winkelsumme $\varepsilon + \alpha + 90^\circ + \alpha = 360^\circ$ berechnet werden. Mit $\varepsilon = 140^\circ$ erhält man:

$$140^\circ + \alpha + 90^\circ + \alpha = 360^\circ \Leftrightarrow 230^\circ + 2\alpha = 360^\circ \Leftrightarrow \underline{\alpha = 65^\circ}$$

Die Seitenkante s kann im gleichschenkligen Dreieck, das aus den beiden Schenkeln s und der Grundseite b besteht, mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Man beachte, dass die Höhe h_b das gleichschenklige Dreieck halbiert.



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W2



Im markierten Dreieck der Figur 3 gilt:

$$\sin 70^\circ = \frac{10,0}{s} \quad | \cdot s$$

$$\Leftrightarrow s \cdot \sin 70^\circ = 10,0 \quad | : \sin 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow \underline{s = 10,64}$$

Einsetzen von $\alpha = 65^\circ$ und $s = 10,64$ in $\sin \alpha = \frac{h_a}{s}$ ergibt:

$$\sin 65^\circ = \frac{h_a}{10,64} \quad | \cdot 10,64$$

$$\Leftrightarrow 9,64 = h_a \text{ bzw. } h_a = 9,64 \text{ cm}$$

→ Berechnung der Grundkante a:

Im markierten Dreieck der Figur 4 gilt: $\cos \alpha = \frac{0,5a}{s}$

(Man beachte, dass die Höhe h_a die Grundkante a der Pyramide halbiert.)

Mit $\alpha = 65^\circ$ und $s = 10,64$ erhält man:

$$\cos 65^\circ = \frac{0,5a}{10,64} \quad | \cdot 10,64$$

$$\Leftrightarrow 4,50 = 0,5a \quad | : 0,5$$

$$\Leftrightarrow 9,0 = a \text{ bzw. } a = 9,0 \text{ cm}$$

Einsetzen von $h_a = 9,64 \text{ cm}$ und $a = 9,0 \text{ cm}$ in $h_p^2 + (0,5a)^2 = h_a^2$ ergibt schließlich:

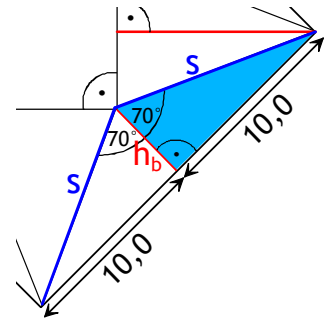
$$h_p^2 + 4,5^2 = 92,93$$

$$\Leftrightarrow h_p^2 + 20,25 = 92,93 \quad | -20,25$$

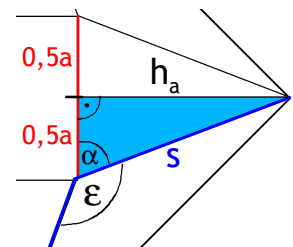
$$\Leftrightarrow h_p^2 = 72,68 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \underline{h_p = 8,53 \text{ cm}}$$

Ergebnis: Die Höhe der quadratischen Pyramide ist $h_p = 8,53 \text{ cm}$.



Figur 3



Figur 4

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W3



Aufgabe W3a:

Lösungsübersicht:

- Die Funktionsgleichung der Parabel p_1 hat die allgemeine Form $y = x^2 + bx + c$ und kann mithilfe zweier Punkte bestimmt werden, deren Koordinaten man im angegebenen Schaubild ablesen kann. Für die Gleichung der Geraden g : $y = m \cdot x + c$ benötigt man die Steigung m und den y-Achsenabschnitt c , die ebenfalls im angegebenen Schaubild abgelesen werden können.
- Zum Prüfen, ob der Schnittpunkt Q zwischen p_1 und p_2 auf der Geraden g liegt, muss man zuerst mithilfe des Scheitelpunkts $S_2(5|-2)$ die Funktionsgleichung von p_2 aufstellen. Durch Gleichsetzen mit der Gleichung von p_1 kann der Schnittpunkt Q berechnet werden. Ob Q auch auf der Geraden g liegt, kann man dann durch Einsetzen der Koordinaten von Q in die Gleichung von g überprüfen.
- Um die Gleichung der Geraden h durch S_1 und $S_2(5|-2)$ bestimmen zu können, benötigt man die Koordinaten des Scheitelpunkts S_1 , die man durch eine quadratische Ergänzung der Gleichung von p_1 bestimmen kann. Durch jeweiliges Einsetzen der Koordinaten von S_1 und S_2 in die allgemeine Gleichung $y = m \cdot x + c$ erhält man ein Gleichungssystem, dessen Lösung die Werte für m und c sind.

Berechnung der Funktionsgleichungen der Parabel p_1 und der Geraden g :

→ Die Funktionsgleichung von p_1 :

Dem Schaubild entnimmt man, dass die Parabel p_1 durch die Punkte $A(-5|0)$ und $B(1|0)$ verläuft. Durch Einsetzen der Koordinaten von $A(-5|0)$ und $B(1|0)$ in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\text{Mit } A(-5|0): \quad 0 = (-5)^2 + b \cdot (-5) + c \Leftrightarrow 0 = 25 - 5b + c \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit } B(1|0): \quad 0 = 1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow 0 = 1 + b + c \quad (\text{II})$$

$$\begin{aligned} (\text{I}) - (\text{II}) \text{ ergibt: } & 0 = 24 - 6b \quad | +6b \\ \Leftrightarrow & 6b = 24 \quad | :6 \\ \Leftrightarrow & b = 4 \end{aligned}$$

Einsetzen von $b = 4$ in Gleichung (II) $0 = 1 + b + c$ ergibt:

$$\begin{aligned} & 0 = 1 + 4 + c \\ \Leftrightarrow & 0 = 5 + c \quad | -5 \\ \Leftrightarrow & -5 = c \text{ bzw. } c = -5 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Parabel p_1 lautet also $p_1: y = x^2 + 4x - 5$.

→ Berechnung der Funktionsgleichung der Geraden g :

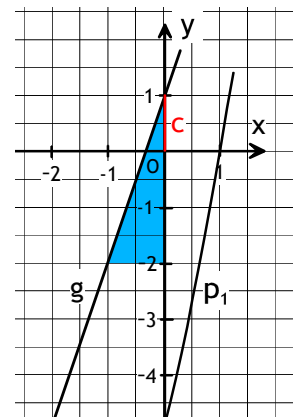
Die allgemeine Gleichung einer Geraden ist $y = m \cdot x + c$, mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt c . Der y-Achsenabschnitt c kann direkt im Schaubild abgelesen werden: $c = 1$

Um die Steigung m bestimmen zu können, muss man zuerst ein Steigungsdreieck zwischen zwei Geradenpunkten einzeichnen. Das eingezeichnete Steigungsdreieck ist 1 Längeneinheit (LE) breit und 3 LE hoch.

$$\text{Somit ist } m = \frac{3}{1} = 3.$$

Ergebnis: Die Gleichung von g lautet also: $y = 3x + 1$.

Hinweis: Man kann die Gleichung von g auch bestimmen, indem man die Koordinaten zweier Geradenpunkte, z.B. $A(-1|-2)$ und $B(0|1)$, jeweils in $y = mx + c$ einsetzt und dann das resultierende Gleichungssystem löst.



Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W3



Prüfen, ob der Schnittpunkt Q der beiden Parabeln auf der Geraden g liegt:

Zunächst muss man die Gleichung der Parabel p_2 bestimmen, um den Schnittpunkt Q berechnen zu können.

→ Die Gleichung der Parabel p_2 :

Die Gleichung der Parabel p_2 erhält man, indem man die Koordinaten des angegebenen Scheitelpunkts $S_2(5|-2)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ einsetzt:

$$y = (x - 5)^2 + (-2)$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 10x + 25 - 2$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 10x + 23$$

Die Gleichung der Parabel p_2 ist also $p_2: y = x^2 - 10x + 23$.

→ Berechnung des Schnittpunkts Q:

Gleichsetzen der Parabelgleichungen $p_1: y = x^2 + 4x - 5$ und $p_2: y = x^2 - 10x + 23$ ergibt:

$$x^2 + 4x - 5 = x^2 - 10x + 23 \quad | -x^2 + 10x + 5$$

$$\Leftrightarrow 14x = 28 \quad | : 14$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Die y-Koordinate des Schnittpunkts Q erhält man durch Einsetzen von $x = 2$ in eine der beiden Parabelgleichungen. Einsetzen von $x = 2$ in $y = x^2 - 10x + 23$ ergibt:

$$y = 2^2 - 10 \cdot 2 + 23 = 7. \text{ Damit ist der Schnittpunkt der beiden Parabeln: } Q(2|7).$$

Für die Punktprobe muss man die Koordinaten von $Q(2|7)$ in die Geradengleichung $g: y = 3x + 1$ einsetzen:

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 7 = 6 + 1$$

Das ist eine wahre Aussage, also liegt der Schnittpunkt Q der beiden Parabeln auch auf der Geraden g.

Ergebnis: Der Schnittpunkt $Q(2|7)$ der beiden Parabeln liegt auf der Geraden g.

Die Funktionsgleichung der Geraden h, die durch S_1 und $S_2(5|-2)$ verläuft:

Zunächst muss man die Koordinaten des Scheitelpunkts S_1 der Parabel p_1 mithilfe einer quadratischen Ergänzung der Parabelgleichung $p_1: y = x^2 + 4x - 5$ bestimmen:

$$y = x^2 + 4x - 5$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 4x + 2^2 - 5 - 2^2 \quad | \text{Anwenden der ersten binomischen Formel}$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 2)^2 - 5 - 4$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 2)^2 - 9. \text{ Dieser Scheitelform entnimmt man: } S_1(-2|-9)$$

Durch Einsetzen der Koordinaten von $S_1(-2|-9)$ und $S_2(5|-2)$ in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\text{Mit } S_1(-2|-9): -9 = m \cdot (-2) + c \Leftrightarrow -9 = -2m + c \quad (I)$$

$$\text{Mit } S_2(5|-2): -2 = m \cdot 5 + c \Leftrightarrow -2 = 5m + c \quad (II)$$

$$(I) - (II) \text{ ergibt: } -7 = -7m \Leftrightarrow m = 1$$

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W3



Den Wert von c erhält man, indem man $m = 1$ in eine der beiden Gleichungen (I) oder (II) einsetzt. Einsetzen von $m = 1$ in Gleichung (I) $-9 = -2m + c$ ergibt:

$$\begin{aligned} -9 &= -2 + c \quad | +2 \\ \Leftrightarrow -7 &= c \quad \text{bzw.} \quad c = -7 \end{aligned}$$

Damit ist $h: y = 1x - 7$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Geraden h ist $y = x - 7$.

Hinweis: Mit den Punkten $S_1(-2|-9)$ und $S_2(5|-2)$ und der Zwei-Punkte-Form kann man auch zunächst die Steigung m der Geraden h berechnen. Indem man anschließend die Koordinaten eines der beiden Punkte $S_1(-2|-9)$ oder $S_2(5|-2)$ in die Gleichung $y = mx + c$ einsetzt, erhält man den y -Achsenabschnitt c .

Aufgabe W3b:

Lösungsübersicht:

Um den Flächeninhalt des Rechtecks berechnen zu können, muss man die Koordinaten der Punkte A und C kennen. Hilfreich ist es, wenn man dann die Punkte A und C in ein Koordinatensystem einträgt und das beschriebene Rechteck einzeichnet.

Zuerst muss man aber die Gleichungen der Parabel p und der Geraden g bestimmen, um deren Schnittpunkte A und C berechnen zu können.

Die Werte von a und c in der Form $y = ax^2 + c$ erhält man, indem man die Koordinaten von $S(0|-4,5)$ und $P(-3|0)$ jeweils in $y = ax^2 + c$ einsetzt und dann das resultierende Gleichungssystem löst.

Die unvollständige Gleichung der Geraden g kann man wegen $m = 1,5$ sofort aufschreiben: $y = 1,5x + c^*$. Den y -Achsenabschnitt c^* erhält man, indem man die Koordinaten von $R(0|0,5)$ in $y = 1,5x + c^*$ einsetzt. Durch Gleichsetzen der Gleichungen von p und g kann man dann die Koordinaten ihrer Schnittpunkte A und C berechnen.

Berechnung des Flächeninhalts des Rechtecks:

Zunächst müssen die Koordinaten der Schnittpunkte A und C zwischen der Parabel p und der Geraden g berechnet werden. Dazu benötigt man die Gleichungen der Parabel p und der Geraden g .

→ Die Gleichung der Parabel p :

Durch Einsetzen der Koordinaten von $S(0|-4,5)$ und $P(-3|0)$ in die Form $y = ax^2 + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

Mit $S(0|-4,5)$: $-4,5 = a \cdot 0^2 + c \Leftrightarrow -4,5 = c \quad \text{bzw.} \quad c = -4,5 \quad \text{(I)}$

Mit $P(-3|0)$: $0 = a \cdot (-3)^2 + c \Leftrightarrow 0 = 9a + c \quad \text{(II)}$

Einsetzen von $c = -4,5$ in (II) $0 = 9a + c$ ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= 9a - 4,5 \quad | +4,5 \\ \Leftrightarrow 4,5 &= 9a \quad | :9 \\ \Leftrightarrow 0,5 &= a \quad \text{bzw.} \quad a = 0,5 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Parabel p ist also: $y = 0,5x^2 - 4,5$.



Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W3

→ Die Gleichung der Geraden g:

Mit der Steigung $m = 1,5$ lautet die unvollständige Gleichung von g: $y = 1,5x + c^*$.
Durch Einsetzen der Koordinaten von R(0|0,5) erhält man:

$$0,5 = 1,5 \cdot 0 + c^* \Leftrightarrow 0,5 = c^* \text{ bzw. } c^* = 0,5$$

Die Gleichung der Geraden g lautet also: $y = 1,5x + 0,5$

→ Berechnung der Schnittpunkte A und C:

Gleichsetzen der Gleichungen p: $y = 0,5x^2 - 4,5$ und g: $y = 1,5x + 0,5$ ergibt:

$$0,5x^2 - 4,5 = 1,5x + 0,5 \quad | -1,5x - 0,5$$

$$\Leftrightarrow 0,5x^2 - 1,5x - 5 = 0 \quad | :0,5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

Mit der Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$$x_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 10} = 5 \text{ und } x_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 10} = -2$$

Das sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte A und C. Die y-Koordinaten erhält man durch Einsetzen in die Gleichung von p oder g.

Einsetzen von $x_1 = 5$ in g: $y = 1,5x + 0,5$ ergibt: $y_1 = 8 \Rightarrow A(5|8)$

Einsetzen von $x_2 = -2$ in g: $y = 1,5x + 0,5$ ergibt: $y_2 = -2,5 \Rightarrow C(-2|-2,5)$

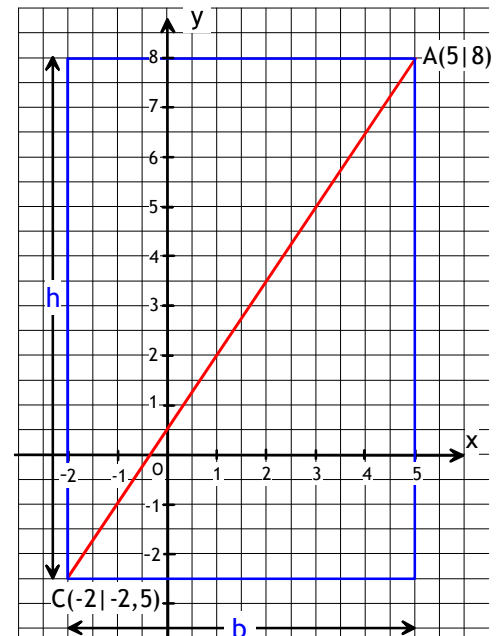
Um schließlich den gesuchten Flächeninhalt des Rechtecks mit der Diagonalen AC berechnen zu können, sollte man die Punkte A(5|8) und C(-2|-2,5) in ein Koordinatensystem eintragen (siehe Abbildung rechts).

Darin erkennt man, dass die Breite des Rechtecks $b = 5 - (-2) = 7$ ist und die Höhe $h = 8 - (-2,5) = 10,5$ beträgt.

Für den Flächeninhalt des Rechtecks folgt somit:

$$A = 7 \cdot 10,5 = 73,5 \text{ FE (Flächeneinheiten)}$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 73,5 FE.



Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W4



Aufgabe W4a:

Lösungsübersicht:

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „**zweimal Glocke**“ (G; G) kann mit der Einzelwahrscheinlichkeit $p(G)$ und der Produktregel berechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit $p(G)$ erhält man aus der angegebenen Anzahl der Symbole auf einer Walze.
- Zur Berechnung des **Erwartungswerts** (siehe Formelsammlung) benötigt man noch die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „**zweimal Sieben**“ (7; 7), die genauso berechnet werden kann, wie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „**zweimal Glocke**“ (G; G).
- **Merles Behauptung** kann überprüft werden, indem man in die Formel zur Berechnung des Erwartungswerts den neuen Einsatz 1,20 € und den zuvor berechneten Erwartungswert einsetzt und für den Gewinn des Ereignisses „**zweimal Sieben**“ eine Variable einführt.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „zweimal Glocke“:

Auf jeder Walze sind 7 Symbole abgebildet, wovon jeweils 2 Glocken sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf *einer* Walze eine Glocke erscheint beträgt also $p(G) = \frac{2}{7}$. Damit folgt mit der Produktregel:

$$P(\text{zweimal Glocke}) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49} \approx 8,2 \%$$

Ergebnis:

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „zweimal Glocke“ beträgt $\frac{4}{49} \approx 8,2 \%$.

Berechnung des Erwartungswerts und Bedeutung für einen Spieler:

Für den Erwartungswert E aus Sicht eines Spielers gilt (siehe Formelsammlung):

$$E = P(\text{zweimal Glocke}) \cdot 4,00 \text{ €} + P(\text{zweimal Sieben}) \cdot 10,00 \text{ €} + P(\text{sonstige}) \cdot 0 \text{ €} + 1 \cdot (-1,00 \text{ €})$$

$$E = P(\text{zweimal Glocke}) \cdot 4,00 \text{ €} + P(\text{zweimal Sieben}) \cdot 10,00 \text{ €} - 1,00 \text{ €}$$

Mit $P(\text{zweimal Glocke}) = \frac{4}{49}$ (siehe oben) folgt:

$$E = \frac{4}{49} \cdot 4,00 \text{ €} + P(\text{zweimal Sieben}) \cdot 10,00 \text{ €} - 1,00 \text{ €}$$

Man benötigt also noch die Wahrscheinlichkeit $P(\text{zweimal Sieben})$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass auf *einer* Walze eine Sieben erscheint, beträgt $p(7) = \frac{1}{7}$.

$$\text{Damit folgt mit der Produktregel: } P(\text{zweimal Sieben}) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$$

Damit erhält man für den Erwartungswert:

$$E = \frac{4}{49} \cdot 4,00 \text{ €} + \frac{1}{49} \cdot 10,00 \text{ €} - 1,00 \text{ €} = -\frac{23}{49} \text{ €} \approx -0,47 \text{ €}$$

Ergebnis: Der Erwartungswert aus Sicht eines Spielers beträgt ca. -0,47 €. Ein Spieler muss also langfristig mit einem Verlust von 0,47 € rechnen.

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W4



Überprüfung von Merles Behauptung:

Für den Erwartungswert E aus Sicht eines Spielers gilt nun: $E = \frac{4}{49} \cdot 4,00 \text{ €} + \frac{1}{49} \cdot x - \text{Einsatz}$

Darin steht die Variable x für den Gewinn des Spielers, wenn das Ereignis „zweimal Sieben“ eintritt. Mit dem gleichbleibenden Erwartungswert $E = -0,47 \text{ €}$ und dem neuen Einsatz $1,20 \text{ €}$ erhält man:

$$-0,47 \text{ €} = \frac{4}{49} \cdot 4,00 \text{ €} + \frac{1}{49} \cdot x - 1,20 \text{ €} \quad | \cdot 49$$

$$\Leftrightarrow -23,03 \text{ €} = 16 \text{ €} + x - 58,80 \text{ €}$$

$$\Leftrightarrow -23,03 \text{ €} = x - 42,80 \text{ €} \quad | + 42,80 \text{ €}$$

$$\Leftrightarrow 19,77 \text{ €} = x \text{ bzw. } x = 19,77 \text{ €}$$

(Hinweis: Wenn man mit $E = -\frac{23}{49} \text{ €}$ rechnet, erhält man $x = 19,80 \text{ €}$.)

Ergebnis: Der Gewinn für das Ereignis „zweimal Sieben“ beträgt unter den neuen Bedingungen $19,77 \text{ €}$.
Merle hat also recht.

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W4



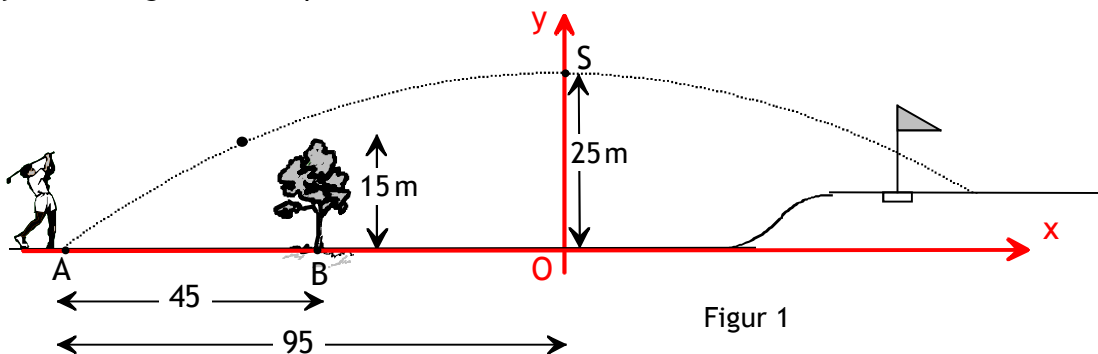
Aufgabe W4b:

Lösungsübersicht:

- Die **Gleichung der Parabel** kann in der Form $y = ax^2 + c$ bestimmt werden, wenn man in die Zeichnung zunächst ein Achsenkreuz so einzeichnet, dass der höchste Punkt der Parabel (also der Scheitelpunkt) auf der y-Achse liegt und der Spieler auf der x-Achse „steht“ (siehe Figur 1). Die Werte für a und c kann man dann mithilfe der angegebenen Maße (95 m und 25 m) berechnen.
- Zur Berechnung des **Abstands des Balls über der Baumspitze** muss man die y-Koordinate des Balls berechnen, wenn er sich genau über dem 15 m hohen Baum befindet. Dazu muss man die x-Koordinate der Stelle, wo der Baum in dem eingezeichneten Achsenkreuz steht, in die Parabelgleichung einsetzen (siehe Figur 2). (Vorsicht: Die x-Koordinate des Baums ist *nicht* 45 m !)
- Um die **Entfernung des Balls vom Loch** zu berechnen, wenn er auf der höher gelegenen Ebene auftrifft, muss man die Koordinaten des Lochs L und des Auftreffpunkts T bestimmen (siehe Figur 3). Die Koordinaten des Lochs L kann man direkt mithilfe der angegebenen Maße und Längen angeben. Die y-Koordinate des Auftreffpunkts T ist $y = 2$, da die höher gelegene Ebene 2 m über der Grundebene (x-Achse) liegt. Die x-Koordinate von T erhält man, indem man $y = 2$ in die Parabelgleichung einsetzt und die resultierende Gleichung nach x auflöst.

Die Gleichung der Parabel:

Man kann die **Gleichung der Parabel** in der Form $y = ax^2 + c$ bestimmen, wenn man in die Zeichnung zunächst ein Achsenkreuz so einzeichnet, dass der Scheitelpunkt S der Parabel auf der y-Achse liegt und der Spieler auf der x-Achse „steht“:



Figur 1

Die Koordinaten der Punkte A und S in dem eingezeichneten Achsenkreuz sind: $A(-95|0)$ und $S(0|25)$.

- Der Wert für c in der Gleichung $y = ax^2 + c$ ist die y-Koordinate des Scheitelpunkts; also $c = 25$.
- Den Wert für a kann man mit den Koordinaten von $A(-95|0)$ berechnen.
Einsetzen der Koordinaten von $A(-95|0)$ in $y = a \cdot x^2 + 25$ ergibt:

$$0 = a \cdot (-95)^2 + 25 \quad | -25$$

$$\Leftrightarrow -25 = a \cdot 9025 \quad | : 9025$$

$$\Leftrightarrow -\frac{25}{9025} = a \quad \text{bzw.} \quad a = -\frac{25}{9025} = -\frac{1}{361} \approx -0,00277$$

Ergebnis: Eine Gleichung der Parabel ist $y = -\frac{1}{361}x^2 + 25$ bzw. $y = -0,00277x^2 + 25$.

Lösungen zur Prüfung 2018: Wahlbereich - Aufgabe W4



Der Abstand des Balls über der Baumspitze:

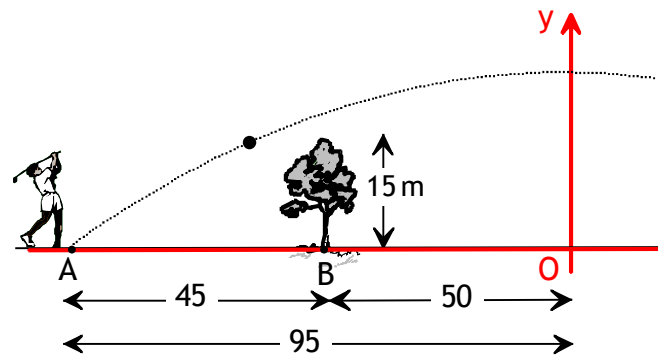
Zunächst muss man die y-Koordinate des Balls berechnen, wenn er sich genau über dem 15 m hohen Baum befindet.

Die Koordinaten der Stelle, wo der Baum steht, sind $B(-50|0)$. Man beachte: $95 - 45 = 50$ (siehe Figur 2). Die Höhe des Balls an der Stelle $x = -50$ erhält man, indem man $x = -50$ in die Gleichung $y = -0,00277x^2 + 25$ einsetzt:

$$y = -0,00277 \cdot (-50)^2 + 25 \approx 18,1 \text{ m}$$

Da der Baum 15 m hoch ist, überfliegt der Ball die Baumspitze in einem Abstand von **3,1 m** ($= 18,1 \text{ m} - 15 \text{ m}$).

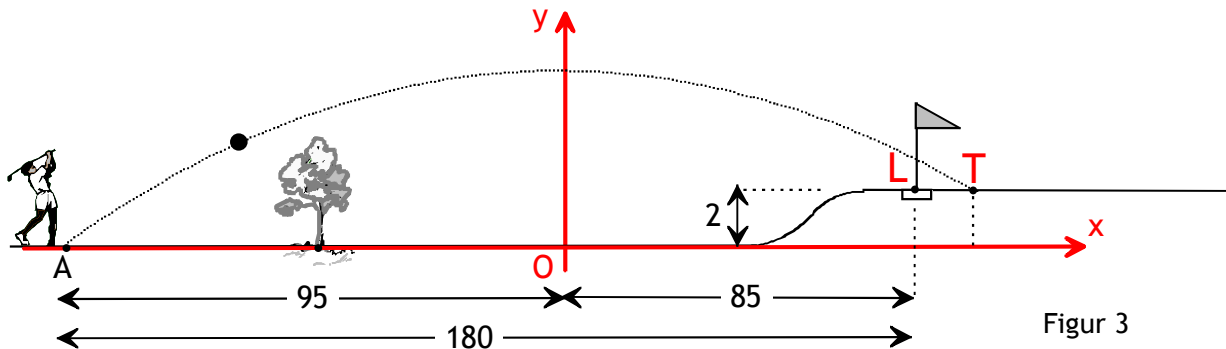
Ergebnis: Der Ball überfliegt die Baumspitze in einem Abstand von 3,1 m.



Figur 2

Die Entfernung der Stelle vom Loch, wo der Ball auftrifft:

Der gesuchte Abstand zwischen Loch L und Auftreffpunkt T ist die Differenz der x-Koordinaten der Punkte T und L (siehe Figur 3, Längen nicht maßstabsgetreu):



Figur 3

Weil das Loch L 180 m vom Abschlagspunkt A entfernt ist und 2 m über der Grundebene (= x-Achse) liegt, hat der Punkt L im eingezeichneten Koordinatensystem die Koordinaten $L(85|2)$. (Man beachte: $180 - 95 = 85$.)

Der Punkt T hat die y-Koordinate $y = 2$, weil er sich ebenfalls auf der 2 m höher gelegenen Ebene befindet. Die x-Koordinate von $T(x|2)$ erhält man, indem man $y = 2$ in die Parabelgleichung $y = -0,00277x^2 + 25$ einsetzt und die resultierende Gleichung nach x auflöst:

$$\begin{aligned} 2 &= -0,00277x^2 + 25 & | -25 \\ \Leftrightarrow -23 &= -0,00277x^2 & | :(-0,00277) \\ \Leftrightarrow 8303 &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 8303 & | \pm\sqrt{} \\ \Rightarrow x_1 &= 91,1 \text{ und } x_2 = -91,1 \end{aligned}$$

Weil der Ball im positiven Bereich der x-Achse auftrifft, ist $x_1 = 91,1$ der richtige Wert.

Der Punkt T hat also die Koordinaten $T(91,1|2)$. Der gesuchte Abstand zum Loch $L(85|2)$ ist somit:

$$d = 91,1 \text{ m} - 85 \text{ m} = 6,1 \text{ m}$$

Ergebnis: Der Ball trifft in einer Entfernung von 6,1 m vom Loch auf.