



Pflichtteil	2
Wahlteil - Aufgabe W1a	12
Wahlteil - Aufgabe W1b	14
Wahlteil - Aufgabe W2a	15
Wahlteil - Aufgabe W2b	17
Wahlteil - Aufgabe W3a	19
Wahlteil - Aufgabe W3b	21
Wahlteil - Aufgabe W4a	23
Wahlteil - Aufgabe W4b	25

Wichtige Hinweise zum Copyright:

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und nur für die eigene Nutzung zugelassen. Kopieren und Vervielfältigen der vorliegenden Datei ist verboten! Jede Nutzung in anderen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags.

Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung vervielfältigt oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Ausgenommen von diesen Regelungen ist die **Verwendung für folgende Unterrichtszwecke:**

So dürfen Lehrkräfte die vorliegende Datei zu Unterrichtszwecken ausdrucken, mit elektronischen Projektionsverfahren (wie Laptop und Beamer) einsetzen und OHP-Folien erstellen. Verboten ist allerdings die Weitergabe der Datei auf elektronischen Datenträgern.

Verstöße werden strafrechtlich verfolgt!

© Mathematik-Verlag 2026, Mosbach

Mathematik-Verlag Rainer Hild
Steige 44-2
74821 Mosbach
Internet: <https://matheverlag.com>
E-Mail: info@matheverlag.com

Lösungen zur Prüfung 2019: Pflichtbereich



Aufgabe P1:

Lösungsübersicht:

Für den Umfang des Vierecks EBCF gilt: $u = \overline{BE} + \overline{BC} + \overline{CF} + \overline{EF}$, wobei $\overline{EF} = 7,2$ cm bereits angegeben ist.

- Die Strecke $\overline{BE}$ kann im Dreieck ABE mit der Sinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel ε_2 kennt (siehe Figur 1). Für ε_2 gilt: $\varepsilon_2 + 90^\circ + \varepsilon_1 = 180^\circ$. Den Winkel ε_1 erhält man mit der Summe der Innenwinkel des Dreiecks DEF.
- Für die Strecke $\overline{BC}$ gilt: $\overline{BC} = \overline{AE} + \overline{DE}$. Die Strecke $\overline{AE}$ kann im Dreieck ABE mit der Tangens- oder Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Die Strecke $\overline{DE}$ erhält man mit der Sinus- oder Kosinusfunktion im Dreieck DEF (siehe Figur 2).
- Für die Strecke $\overline{CF}$ gilt: $\overline{CF} = \overline{CD} - \overline{DF}$, wobei $\overline{CD} = \overline{AB} = 6,6$ cm gilt (siehe Figur 1).

Die Strecke $\overline{DF}$ kann im Dreieck DEF mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

Tipp: Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst im Dreieck DEF die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$ berechnen und den fehlenden Winkel $\varepsilon_1 = 90^\circ - 59^\circ = 31^\circ$ eintragen.

Berechnung des Umfangs des Vierecks EBCF:

Für den Umfang des Vierecks EBCF gilt: $u = \overline{BE} + \overline{BC} + \overline{CF} + \overline{EF}$

Und mit $\overline{EF} = 7,2$ cm: $u = \overline{BE} + \overline{BC} + \overline{CF} + 7,2$ cm

→ Berechnung der Strecke $\overline{BE}$:

Im Dreieck ABE gilt (siehe Figur 1):

$$\sin \varepsilon_2 = \frac{6,6}{\overline{BE}}$$

Für ε_2 gilt: $\varepsilon_2 + 90^\circ + \varepsilon_1 = 180^\circ$. Den Winkel ε_1 erhält man mit der Summe der Innenwinkel des Dreiecks DEF:

$$\varepsilon_1 + 59^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_1 + 149^\circ = 180^\circ \quad | -149^\circ$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_1 = 31^\circ$$

Damit folgt für ε_2 :

$$\varepsilon_2 + 90^\circ + 31^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_2 + 121^\circ = 180^\circ \quad | -121^\circ$$

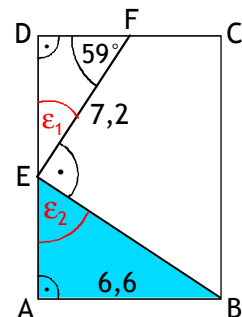
$$\Leftrightarrow \varepsilon_2 = 59^\circ$$

Einsetzen in $\sin \varepsilon_2 = \frac{6,6}{\overline{BE}}$ ergibt:

$$\sin 59^\circ = \frac{6,6}{\overline{BE}} \quad | \cdot \overline{BE}$$

$$\Leftrightarrow \sin 59^\circ \cdot \overline{BE} = 6,6 \quad | : \sin 59^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE} = 7,70 \text{ cm}$$



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2019: Pflichtbereich



→ Berechnung der Strecke $\overline{BC}$:

Für die Strecke $\overline{BC}$ gilt: $\overline{BC} = \overline{AE} + \overline{DE}$

Die Strecke $\overline{AE}$ kann im Dreieck ABE mit der Tangens- oder mit der Kosinusfunktion berechnet werden.

Es gilt (siehe Figur 2):

$$\cos 59^\circ = \frac{\overline{AE}}{7,7} \quad | \cdot 7,7$$

$$\Leftrightarrow 3,97 = \overline{AE} \text{ bzw. } \overline{AE} = 3,97 \text{ cm}$$

Die Strecke $\overline{DE}$ erhält man mit der Sinusfunktion im Dreieck DEF. Es gilt (siehe Figur 2):

$$\sin 59^\circ = \frac{\overline{DE}}{7,2} \quad | \cdot 7,2$$

$$\Leftrightarrow 6,17 = \overline{DE} \text{ bzw. } \overline{DE} = 6,17 \text{ cm}$$

Damit ist $\overline{BC} = 3,97 \text{ cm} + 6,17 \text{ cm} = 10,14 \text{ cm}$

→ Berechnung der Strecke $\overline{CF}$:

Für die Strecke $\overline{CF}$ gilt (siehe Figur 2): $\overline{CF} = \overline{CD} - \overline{DF}$

Mit $\overline{CD} = \overline{AB} = 6,6 \text{ cm}$ folgt: $\overline{CF} = 6,6 \text{ cm} - \overline{DF}$

Die Strecke $\overline{DF}$ kann im Dreieck DEF mit der Kosinusfunktion berechnet werden. Es gilt:

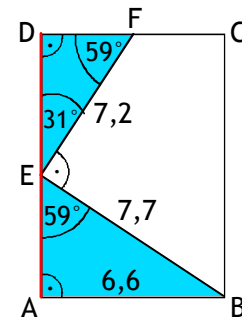
$$\cos 59^\circ = \frac{\overline{DF}}{7,2} \quad | \cdot 7,2$$

$$\Leftrightarrow 3,71 = \overline{DF} \text{ bzw. } \overline{DF} = 3,71 \text{ cm. Damit ist } \overline{CF} = 6,6 \text{ cm} - 3,71 \text{ cm} = 2,89 \text{ cm.}$$

Einsetzen von $\overline{BE} = 7,70 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 10,14 \text{ cm}$ und $\overline{CF} = 2,89 \text{ cm}$ in $u = \overline{BE} + \overline{BC} + \overline{CF} + 7,2 \text{ cm}$ ergibt:

$$u = 7,70 \text{ cm} + 10,14 \text{ cm} + 2,89 \text{ cm} + 7,2 \text{ cm} = 27,93 \text{ cm}$$

Ergebnis: Das Viereck EBCF hat den Umfang $u = 27,93 \text{ cm}$.



Figur 2

Aufgabe P2:

Lösungsübersicht:

Für den Flächeninhalt des Trapezes ABEF gilt: $A_{ABEF} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{EF}) \cdot \overline{AF}$, mit der Trapezhöhe $\overline{AF}$.

- Die Strecke $\overline{EF}$ kann im Dreieck CFE mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1).
- Für die Strecke $\overline{AB}$ gilt: $\overline{AB} = \overline{EF} + \overline{DE}$, mit $\overline{DE} = 5,1 \text{ cm}$ (siehe Figur 1).
- Für die Strecke $\overline{AF}$ gilt: $\overline{AF} = \overline{BD}$. Die Strecke $\overline{BD}$ kann im Dreieck BDE mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel ε_2 kennt (siehe Figur 2). Der Winkel ε_2 ist der Scheitelwinkel von ε_1 , sodass gilt: $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$. Der Winkel ε_1 wiederum kann mit der Summe der Innenwinkel des Dreiecks CFE bestimmt werden (siehe Figur 2).

Tipp: Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zuerst im rechtwinkligen Dreieck CFE alle fehlenden Strecken und den Winkel ε_1 bestimmen.

Lösungen zur Prüfung 2019: Pflichtbereich



Für den Flächeninhalt des Trapezes ABEF gilt (siehe Formelsammlung):

$$A_{ABEF} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{EF}) \cdot \overline{AF}, \text{ mit der Trapezhöhe } \overline{AF}$$

→ Berechnung der Strecke $\overline{EF}$:

Die Strecke $\overline{EF}$ kann im rechtwinkligen Dreieck CFE mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 1). Es gilt:

$$\sin 38^\circ = \frac{\overline{EF}}{6,3} \quad | \cdot 6,3$$

$$\Leftrightarrow 3,88 = \overline{EF} \text{ bzw. } \overline{EF} = 3,88 \text{ cm}$$

→ Berechnung der Strecke $\overline{AB}$:

Für die Strecke $\overline{AB}$ gilt (siehe Figur 1):

$\overline{AB} = \overline{EF} + 5,1 \text{ cm}$. Mit $\overline{EF} = 3,88 \text{ cm}$ (siehe oben) folgt:

$$\overline{AB} = 8,98 \text{ cm}$$

→ Berechnung der Strecke $\overline{AF}$:

Für die Strecke $\overline{AF}$ gilt: $\overline{AF} = \overline{BD}$. Die Strecke $\overline{BD}$ kann im Dreieck BDE mit der Tangensfunktion berechnet werden.

$$\text{Es gilt (siehe Figur 2): } \tan \varepsilon_2 = \frac{\overline{BD}}{5,1}$$

Der Winkel ε_2 ist der Scheitelwinkel von ε_1 . Es gilt also:

$\varepsilon_2 = \varepsilon_1$. Den Winkel ε_1 erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck CFE. Darin gilt:

$$\varepsilon_1 + 38^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \varepsilon_1 + 128^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \varepsilon_1 = 52^\circ$$

Damit ist auch $\varepsilon_2 = 52^\circ$. Einsetzen in $\tan \varepsilon_2 = \frac{\overline{BD}}{5,1}$ ergibt:

$$\tan 52^\circ = \frac{\overline{BD}}{5,1} \quad | \cdot 5,1$$

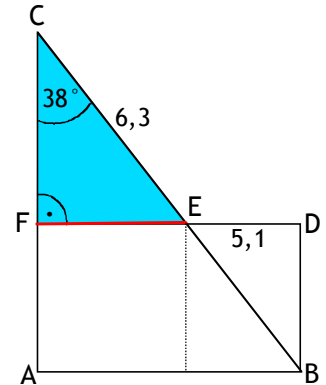
$$\Leftrightarrow 6,53 = \overline{BD} \text{ bzw. } \overline{BD} = 6,53 \text{ cm}$$

Damit gilt ebenfalls: $\overline{AF} = 6,53 \text{ cm}$

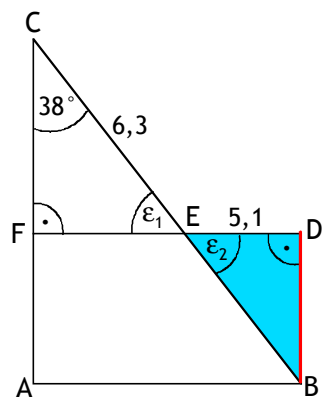
Einsetzen von $\overline{EF} = 3,88 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 8,98 \text{ cm}$ und $\overline{AF} = 6,53 \text{ cm}$ in $A_{ABEF} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{EF}) \cdot \overline{AF}$ ergibt:

$$A_{ABEF} = \frac{1}{2} (8,98 \text{ cm} + 3,88 \text{ cm}) \cdot 6,53 \text{ cm} = 42,0 \text{ cm}^2$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Trapezes ABEF beträgt $A_{ABEF} = 42,0 \text{ cm}^2$.



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2019: Pflichtbereich



Aufgabe P3:

Lösungsübersicht:

- Die **Oberfläche des zusammengesetzten Körpers** besteht aus den zwei Mantelflächen M der beiden Pyramiden und den 4 unbedeckten Quadraten des Würfels mit der Kantenlänge a . Es gilt also: $O_{\text{zus}} = 2M + 4a^2$. Zur Berechnung der Mantelfläche M benötigt man sowohl die Kantenlänge a als auch die Seitenhöhe h_s . Beide Strecken können mit der Sinus- bzw. Kosinusfunktion in der Hälfte eines Seitendreiecks der Pyramide berechnet werden, da $s = 8,5 \text{ cm}$ und $\varepsilon = 41,4^\circ$ angegeben sind (siehe Figur 1).
- Der **Abstand der beiden Pyramidenspitzen A und B** kann mit dem Satz des Pythagoras in dem rechtwinkligen Dreieck der Figur 3 berechnet werden. Dazu benötigt man noch die Länge der Pyramidenhöhe h . Diese kann ebenfalls mit dem Satz des Pythagoras und den Strecken a und h_s berechnet werden (siehe Figur 4).

Der Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers:

Für den Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers gilt:

$O_{\text{zus}} = 2M + 4a^2$; wobei M der Inhalt der Mantelfläche einer Pyramide ist.

Mit $M = 2a \cdot h_s$ (siehe Formelsammlung) erhält man: $O_{\text{zus}} = 4a \cdot h_s + 4a^2$

→ Berechnung der Kantenlänge a :

Die Kantenlänge a kann mit der Sinusfunktion in dem markierten Dreieck der Figur 2 berechnet werden. Man beachte, dass der Winkel $\varepsilon = 41,4^\circ$ von der Seitenhöhe h_s halbiert wird, weil das Seitendreieck einer quadratischen Pyramide gleichschenkelig ist. Es gilt (siehe Figur 2):

$$\sin 20,7^\circ = \frac{0,5a}{8,5} \quad | \cdot 8,5$$

$$\Leftrightarrow 8,5 \sin 20,7^\circ = 0,5a \quad | : 0,5$$

$$\Leftrightarrow 6,01 = a \text{ bzw. } \underline{a = 6,01 \text{ cm}}$$

→ Berechnung der Seitenhöhe h_s :

Die Seitenhöhe h_s kann im markierten Dreieck der Figur 2 mit der Kosinusfunktion berechnet werden. Es gilt:

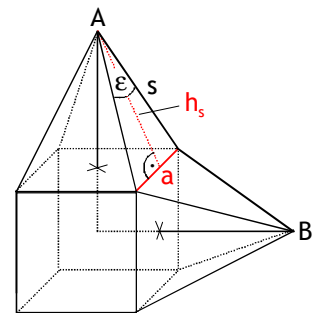
$$\cos 20,7^\circ = \frac{h_s}{8,5} \quad | \cdot 8,5$$

$$\Leftrightarrow 7,95 = h_s \text{ bzw. } \underline{h_s = 7,95 \text{ cm}}$$

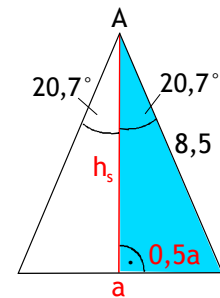
Damit folgt für den Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers:

$$O_{\text{zus}} = 4 \cdot 6,01 \text{ cm} \cdot 7,95 \text{ cm} + 4 \cdot (6,01 \text{ cm})^2 = \underline{335,6 \text{ cm}^2}$$

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers ist $\underline{O_{\text{zus}} = 335,6 \text{ cm}^2}$.



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2019: Pflichtbereich



Der Abstand der beiden Pyramidenspitzen A und B:

Der Abstand der beiden Pyramidenspitzen A und B kann mit dem Satz des Pythagoras in dem markierten Dreieck der Figur 3 berechnet werden.

Darin gilt: $\overline{AB}^2 = (h + 0,5a)^2 + (h + 0,5a)^2$

→ Berechnung der Pyramidenhöhe h:

Die Pyramidenhöhe h kann im markierten Dreieck der Figur 4 ebenfalls mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

Darin gilt: $h^2 + (0,5a)^2 = h_s^2$

Mit $a = 6,01 \text{ cm}$ und $h_s = 7,95 \text{ cm}$ erhält man:

$$h^2 + 9,03 \text{ cm}^2 = 63,20 \text{ cm}^2 \quad | -9,03 \text{ cm}^2$$

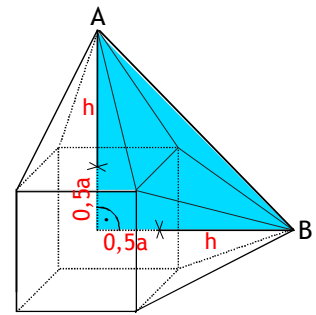
$$\Leftrightarrow h^2 = 54,17 \text{ cm}^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \underline{h = 7,36 \text{ cm}}$$

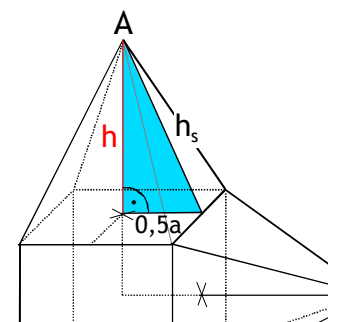
Einsetzen von $a = 6,01 \text{ cm}$ und $h = 7,36 \text{ cm}$ in $\overline{AB}^2 = (h + 0,5a)^2 + (h + 0,5a)^2$ ergibt: $\overline{AB}^2 = (10,365 \text{ cm})^2 + (10,365 \text{ cm})^2$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 214,87 \text{ cm}^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \underline{\overline{AB} = 14,66 \text{ cm}}$$



Figur 3



Figur 4

Ergebnis: Der Abstand der beiden Pyramidenspitzen beträgt $\overline{AB} = 14,66 \text{ cm}$.

Aufgabe P4:

Prozentualer Anstieg des Verkaufs von E-Bikes von 2013 bis 2017:

Im Jahr 2013 wurden 410 000 E-Bikes verkauft. Das ist der Grundwert G.

Im Jahr 2017 wurden 720 000 E-Bikes verkauft. Das ist der erhöhte Grundwert G_+ .

Einsetzen von $G = 410\,000$ E-Bikes und $G_+ = 720\,000$ E-Bikes in die Formel $G_+ = G \cdot q_+$ ergibt:

$$720\,000 = 410\,000 \cdot q_+ \quad | : 410\,000$$

$$\Leftrightarrow 1,756 = q_+ \text{ bzw. } q_+ = 1,756$$

Mit $q_+ = 1 + \frac{p}{100}$ folgt: $p \% = 75,6 \%$

Ergebnis: Der Verkauf von E-Bikes ist von 2013 bis 2017 insgesamt um 75,6 % angestiegen.

Die Anzahl aller verkauften Fahrräder im Jahr 2017:

Im Jahr 2017 wurden 720 000 E-Bikes verkauft. Laut Balkendiagramm waren das 19 % aller Fahrräder. Daraus kann die Anzahl aller verkauften Fahrräder (= Grundwert G) mit einer Dreisatzrechnung oder

mit der Formel $W = G \cdot \frac{p}{100}$ berechnet werden. Mit $W = 720\,000$ E-Bikes und $p \% = 19 \%$ erhält man:

$$720\,000 = G \cdot 0,19 \quad | : 0,19$$

$$\Leftrightarrow 3\,789\,473,7 = G \text{ bzw. } G \approx \underline{\underline{3\,789\,474 \text{ Fahrräder}}}$$

Ergebnis: Im Jahr 2017 wurden 3 789 474 Fahrräder verkauft.

Lösungen zur Prüfung 2019: Pflichtbereich



Die Anzahl der Mountainebikes mit Vollfederung:

Zunächst muss berechnet werden, wie viele Mountainebikes insgesamt im Jahr 2017 verkauft wurden. Gesucht ist also der Prozentwert W . Gegeben sind $G = 3\,789\,474$ Fahrräder (siehe oben) und laut

Balkendiagramm der Prozentsatz $p\% = 7\%$. Einsetzen in die Formel $W = G \cdot \frac{p}{100}$ ergibt:

$$W = 3\,789\,474 \cdot 0,07 \approx 265\,263 \text{ Mountainebikes}$$

Von diesen 265263 Mountainebikes haben laut Aufgabenstellung 22 % eine Vollfederung. Nun sind also die 265263 Mountainebikes der Grundwert G . Der Prozentsatz beträgt nun $p\% = 22\%$.

Man erhält mit der Formel $W = G \cdot \frac{p}{100}$:

$$W = 265263 \cdot 0,22 \approx \mathbf{58\,358 \text{ Mountainebikes mit Vollfederung}}$$

Ergebnis: Im Jahr 2017 wurden 58 358 Mountainebikes mit Vollfederung verkauft.

Aufgabe P5:

Die Lösung des Gleichungssystems:

$$(1) \quad \frac{x+2}{4} - y = 6$$

$$(2) \quad 7 - (x - 2y) = y$$

Zunächst müssen beide Gleichungen vereinfacht werden:

Gleichung (1):

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{4} - y &= 6 & | \cdot 4 \\ \Leftrightarrow x + 2 - 4y &= 24 & | -2 \\ \Leftrightarrow x - 4y &= 22 \end{aligned}$$

Gleichung (2):

$$\begin{aligned} 7 - (x - 2y) &= y \\ \Leftrightarrow 7 - x + 2y &= y & | -y - 7 \\ \Leftrightarrow -x + y &= -7 \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems kann man nun mit dem Additionsverfahren bestimmen:

$$(1): \quad x - 4y = 22$$

$$(2): \quad -x + y = -7$$

$$\begin{aligned} (1) + (2): \quad -3y &= 15 & | :(-3) \\ \Leftrightarrow y &= -5 \end{aligned}$$

Einsetzen von $y = -5$ in die vereinfachte Gleichung (1) $x - 4y = 22$ ergibt:

$$\begin{aligned} x - 4 \cdot (-5) &= 22 \\ \Leftrightarrow x + 20 &= 22 & | -20 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

(Hinweis: Man hätte $y = -5$ auch in die Gleichung (2) $-x + y = -7$ einsetzen können.)

Ergebnis: Die Lösung des Gleichungssystems ist $x = 2$ und $y = -5$. bzw. $L = \{2; -5\}$.

(Hinweis: Man kann das Gleichungssystem auch mit dem Einsetzungs- oder Gleichsetzungsverfahren lösen. Dazu hätte man beide Gleichungen (1) und (2) zuerst jeweils nach der gleichen Variablen umstellen müssen.)

Lösungen zur Prüfung 2019: Pflichtbereich



Aufgabe P6:

Der Graph und die Funktionsgleichung, die zur Wertetabelle gehören:

• Durch die Wertetabelle sind die Punkte $P(0|5)$, $Q(1|0)$, $R(2|-3)$ und $T(3|-4)$ gegeben. Um die Wertetabelle dem richtigen Graphen zuordnen zu können, muss man im Schaubild ablesen, auf welcher Parabel sich diese Punkte befinden. Der Punkt $P(0|5)$ liegt auf beiden Parabeln. Der Punkt $Q(1|0)$ liegt aber nur auf p_2 . Da die Wertetabelle laut Aufgabenstellung zu einer der beiden Parabeln gehören muss, ist die **Parabel p_2** der richtige Graph.

(Hinweis: Die Punkte $R(2|-3)$ und $T(3|-4)$ müssen ebenfalls auf p_2 liegen, auch wenn sie außerhalb des abgebildeten Schaubilds sind.)

• Um der Wertetabelle die richtige Funktionsgleichung zuordnen zu können, muss man mit den Punkten $P(0|5)$, $Q(1|0)$, $R(2|-3)$ und $T(3|-4)$ und den drei Funktionsgleichungen eine Punktprobe durchführen.

Punktprobe mit $P(0|5)$:

in (A) $y = x^2 - 6x + 5$: $5 = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5$; **wahre Aussage**

in (B) $y = x^2 - 2x + 5$: $5 = 0^2 - 2 \cdot 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5$; **wahre Aussage**

in (C) $y = x^2 + 4x + 5$: $5 = 0^2 + 4 \cdot 0 + 5 \Leftrightarrow 5 = 5$; **wahre Aussage**

Punktprobe mit $Q(1|0)$:

in (A) $y = x^2 - 6x + 5$: $0 = 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 \Leftrightarrow 0 = 0$; **wahre Aussage**

in (B) $y = x^2 - 2x + 5$: $0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 \Leftrightarrow 0 = 4$; **falsche Aussage**

in (C) $y = x^2 + 4x + 5$: $0 = 1^2 + 4 \cdot 1 + 5 \Leftrightarrow 0 = 10$; **falsche Aussage**

Weil laut Aufgabenstellung eine der drei Funktionsgleichungen zur Wertetabelle gehören muss und die Gleichungen (B) und (C) nach der Punktprobe mit $Q(1|0)$ ausscheiden, muss die Wertetabelle zur Funktionsgleichung (A) gehören.

Ergebnis: Die Wertetabelle gehört zum Graphen p_2 und zur Funktionsgleichung (A) $y = x^2 - 6x + 5$.

Der dritte Graph p_3 :

Für den dritten Graph kommen nur die Funktionsgleichungen (B) und (C) in Frage, weil (A) bereits der Parabel p_2 zugeordnet wurde. Die Graphen der Funktionsgleichungen (B) und (C) sind nach oben geöffnete verschobene Normalparabeln, die mithilfe der Koordinaten ihrer Scheitelpunkte zugeordnet bzw. gezeichnet werden können. Dazu muss jeweils eine quadratische Ergänzung durchgeführt werden.

• Eine quadratische Ergänzung von (B) ergibt:

$$y = x^2 - 2x + 5$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 2x + 1^2 + 5 - 1^2$$

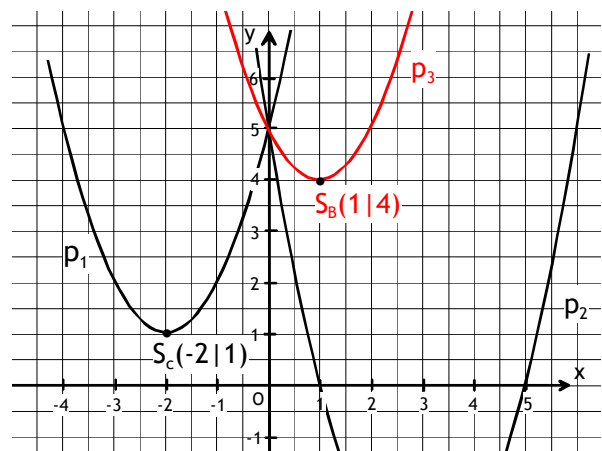
$$\Leftrightarrow y = (x - 1)^2 + 4$$

Der Scheitelpunkt von (B) ist also $S_B(1|4)$.

• Eine quadratische Ergänzung von (C) ergibt: $y = x^2 + 4x + 4 + 5 - 4 \Leftrightarrow y = (x + 2)^2 + 1 \Rightarrow S_C(-2|1)$
Das ist der Scheitelpunkt der Parabel p_1 .

Demnach ist **(B) die Funktionsgleichung der dritten Parabel p_3** .

Schaubild des dritten Graphen p_3 :





Lösungen zur Prüfung 2019: Pflichtbereich

Aufgabe P7:

Die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse „Zuerst ein roter, dann ein weißer Kaugummi“ und „Zweimal kein grüner Kaugummi“:

Insgesamt befinden sich 25 Kaugummi in dem Automat.

• Die Wahrscheinlichkeit, zuerst einen roten Kaugummi zu ziehen, ist $P(\text{rot}) = \frac{10}{25}$. Beim zweiten Zug befinden sich dann nur noch 24 Kaugummi in dem Automat, wovon 9 Kaugummi weiß sind. Also gilt beim zweiten Zug: $P(\text{weiß}) = \frac{9}{24}$. Mit der Produktregel erhält man für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Zuerst ein roter, dann ein weißer Kaugummi“:

$$P(\text{erst rot, dann weiß}) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{90}{600} = 15 \, \%.$$

• Die Wahrscheinlichkeit, *keinen* grünen Kaugummi zu ziehen, ist beim ersten Zug

$P(\text{kein grüner K.}) = \frac{19}{25}$, da von den 25 Kaugummi nur 6 Kaugummi grün sind. Das heißt, 19 Kaugummi sind *nicht-grün* ($25 - 6 = 19$). Beim zweiten Zug befinden sich dann nur noch insgesamt 24 Kaugummi und 18 *nicht-grüne* Kaugummi in dem Automat. Also gilt beim zweiten Zug:

$$P(\text{kein grüner K.}) = \frac{18}{24}.$$

Mit der Produktregel folgt dann für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „zweimal kein grüner Kaugummi“:

$$P(\text{zweimal kein grüner K.}) = \frac{19}{25} \cdot \frac{18}{24} = \frac{342}{600} = 57 \, \%.$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine roten und dann einen weißen Kaugummi zu ziehen, beträgt **$P(\text{erst rot, dann weiß}) = 15 \, \%$** .

Die Wahrscheinlichkeit zweimal keinen grünen Kaugummi zu ziehen, beträgt

$P(\text{zweimal kein grüner K.}) = 57 \, \%$.

Die Wahrscheinlichkeit, zwei mit Brause gefüllte Kaugummi zu ziehen:

In dem Automat befinden sich 8 Kaugummi ($= \frac{10}{2}$ rote + $\frac{6}{2}$ grüne Kaugummi), die mit Brause gefüllt sind (siehe Aufgabenstellung). Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug einen mit Brause gefüllten Kaugummi zu bekommen, ist $P_1(\text{Brause}) = \frac{8}{25}$. Die Wahrscheinlichkeit, anschließend auch beim zweiten

Zug einen mit Brause gefüllten Kaugummi zu erhalten, ist $P_2(\text{Brause}) = \frac{7}{24}$.

Mit der Produktregel folgt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Zwei Brause-Kaugummi“:

$$P(\text{zweimal Brause}) = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} = \frac{56}{600} = 9,3 \, \%.$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, dass Lisa zwei mit Brause gefüllte Kaugummi erhält, beträgt **$P(\text{zweimal Brause}) = 9,3 \, \%$** .

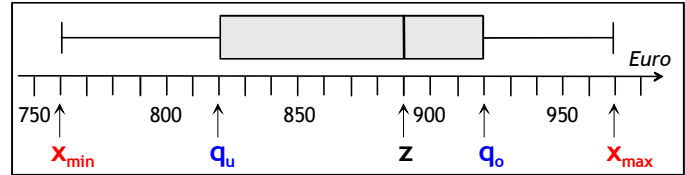
Lösungen zur Prüfung 2019: Pflichtbereich



Aufgabe P8:

Zuordnung des dargestellten Boxplots:

Beide Ranglisten stimmen in den Extremwerten $x_{\min} = 760 \text{ €}$ und $x_{\max} = 970 \text{ €}$ überein. Man muss als Entscheidungskriterium also die beiden Zentralwerte und die oberen und unteren Quartile der Ranglisten bestimmen.



Rangliste der technischen Berufe (17 Werte):

760 | 780 | 800 | 820 | **820** | 840 | 840 | 860 | **890** | 910 | 910 | 920 | **920** | 920 | 950 | 960 | **970**

Der Zentralwert z befindet sich wegen $\frac{17}{2} = 8,5$ am 9. Platz: $z = 890 \text{ €}$

Das untere Quartil q_u befindet sich wegen $\frac{1}{4} \cdot 17 = 4,25$ am 5. Platz: $q_u = 820 \text{ €}$

Das obere Quartil q_o befindet sich wegen $\frac{3}{4} \cdot 17 = 12,75$ am 13. Platz: $q_o = 920 \text{ €}$

Alle Kennwerte der Rangliste der technischen Berufe stimmen mit den Kennwerten des dargestellten Boxplots überein.

Ergebnis: Der dargestellte Boxplot gehört zur Rangliste der technischen Berufe.

Der Boxplot der anderen Berufsgruppe:

Für den Boxplot der kaufmännischen Berufen muss man dessen Kennwerte bestimmen.

Rangliste der kaufmännischen Berufe (13 Werte):

760 | 770 | 820 | **820** | 840 | 880 | **890** | 910 | 920 | **940** | 940 | 950 | **970**

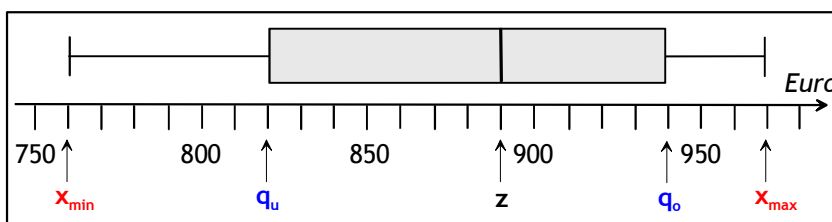
Der Zentralwert z befindet sich wegen $\frac{13}{2} = 6,5$ am 7. Platz: $z = 890 \text{ €}$

Das untere Quartil q_u befindet sich wegen $\frac{1}{4} \cdot 13 = 3,25$ am 4. Platz: $q_u = 820 \text{ €}$

Das obere Quartil q_o befindet sich wegen $\frac{3}{4} \cdot 13 = 9,75$ am 10. Platz: $q_o = 940 \text{ €}$

Die Extremwerte sind $x_{\min} = 760 \text{ €}$ und $x_{\max} = 970 \text{ €}$.

Somit sieht der **Boxplot der kaufmännischen Berufe** so aus:



Hinweis: Beide Boxplots unterscheiden sich nur in ihrem oberen Quartil.

Lösungen zur Prüfung 2019: Pflichtbereich



Der neue Boxplot unter Berücksichtigung der vier Jugendlichen:

Mit den vier neuen Werten sieht die Rangliste der kaufmännischen Berufe so aus:

760 | 770 | 800 | 820 | **820** | 840 | 850 | 880 | **890** | 900 | 910 | 920 | **940** | 940 | 950 | 950 | 970

(Die neuen Werte sind unterstrichen.)

Der neue Zentralwert z_{neu} befindet sich wegen $\frac{17}{2} = 8,5$ am 9. Platz: $z_{\text{neu}} = 890 \text{ €}$

Das neue untere Quartil q_u^* befindet sich wegen $\frac{1}{4} \cdot 17 = 4,25$ am 5. Platz: $q_u^* = 820 \text{ €}$

Das neue obere Quartil q_o^* befindet sich wegen $\frac{3}{4} \cdot 17 = 12,75$ am 13. Platz: $q_o^* = 940 \text{ €}$

Das sind die gleichen Kennwerte wie bisher. Die beiden Extremwerte bleiben ebenfalls unverändert.

Ergebnis: Der neue Boxplot der kaufmännischen Berufe ändert sich nicht, weil die neue Rangliste die gleichen Kennwerte hat wie die alte Rangliste.

Alternative Begründung:

In jedem Viertel der alten Rangliste kommt ein neuer Wert hinzu. Außerdem bleiben die Extremwerte unverändert.

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1a:

Lösungsübersicht:

Zunächst sollte man die zusätzlichen Punkte G und H eintragen, sodass die rechtwinkligen Dreiecke BGC und CHD entstehen (siehe Figur 1). Der gesuchte Abstand des Punktes D zur Strecke $\overline{AB}$ ist dann die Strecke $\overline{GH} = \overline{CG} + \overline{CH}$.

- Die Strecke $\overline{CG}$ kann im Dreieck BGC mit der Sinusfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel β_1 kennt (siehe Figur 1). Für diesen Winkel gilt: $\beta_1 + \beta_2 + 60^\circ = 180^\circ$. Der Winkel β_2 ist ein Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BCF und kann wegen $0,5 \overline{BF} = 1,7 \text{ cm}$ mit der Kosinusfunktion und $\overline{BC} = 7,0 \text{ cm}$ berechnet werden (siehe Figur 2).
- Die Strecke $\overline{CH}$ kann im Dreieck CHD mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel δ_1 und die Strecke $\overline{DH}$ kennt (siehe Figur 3). Für $\overline{DH}$ gilt: $\overline{DH} = \overline{BG} + 1,7 \text{ cm}$ (siehe Figur 4). Die Strecke $\overline{BG}$ wiederum erhält man im Dreieck BGC mit der Kosinusfunktion oder mit dem Satz des Pythagoras (siehe Figur 4).

Tipp: Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zunächst alle Innenwinkel des gleichseitigen Dreiecks ABF eintragen, die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks BCF einzeichnen und den Basiswinkel β_2 im Dreieck BCF berechnen (siehe Figuren 1 und 2).

Berechnung des Abstands des Punktes D zur Strecke $\overline{AB}$:

Der gesuchte Abstand des Punktes D zur Strecke $\overline{AB}$ ist die Strecke $\overline{GH} = \overline{CG} + \overline{CH}$ (siehe Figur 1).

→ Berechnung der Strecke $\overline{CG}$:

Im Dreieck BGC gilt (siehe Figur 1): $\sin \beta_1 = \frac{\overline{CG}}{7,0}$

- Berechnung des Winkels β_1 :

Für den Winkel β_1 gilt (Figur 1): $\beta_1 + \beta_2 + 60^\circ = 180^\circ$

Der Winkel β_2 ist ein Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BCF. Die Höhe h teilt das Dreiecks BCF in zwei rechtwinklige Dreiecke und halbiert die Basis $\overline{BF} = 3,4 \text{ cm}$ (siehe Figur 2).

In dem markierten Dreieck der Figur 2 gilt:

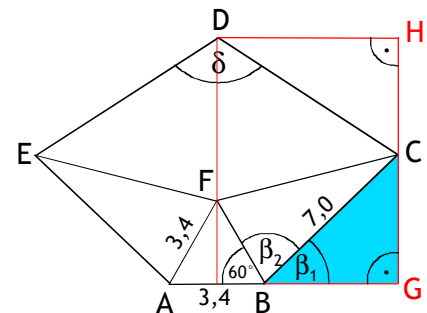
$$\cos \beta_2 = \frac{1,7}{7,0} \Rightarrow \beta_2 = 75,9^\circ. \text{ Damit folgt f\"ur } \beta_1:$$

$$\beta_1 + 75,9^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \beta_1 = 44,1^\circ$$

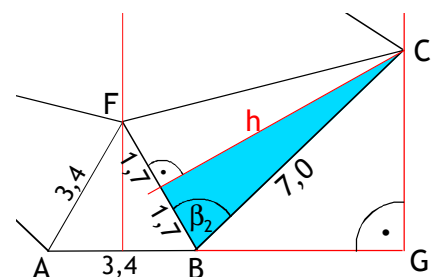
Einsetzen von $\beta_1 = 44,1^\circ$ in $\sin \beta_1 = \frac{\overline{CG}}{7.0}$ ergibt:

$$\sin 44,1^\circ = \frac{\overline{CG}}{7,0} \quad | \cdot 7,0$$

$$\Leftrightarrow 4,87 = \overline{CG} \text{ bzw. } \overline{CG} = 4,87 \text{ cm}$$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W1



→ Berechnung der Strecke $\overline{CH}$:

Die Strecke $\overline{CH}$ kann im Dreieck CHD mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Es gilt:

$$\tan \delta_1 = \frac{\overline{\text{CH}}}{\overline{\text{DH}}}$$

- Berechnung des Winkels δ_1 :

Aus Symmetriegründen kommt der Winkel δ_1 auch „links“ des Punktes D vor (siehe Figur 3).

Mit $\delta = 118^\circ$ gilt daher:

$$2\delta_1 + 118^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \underline{\delta_1 = 31^\circ}$$

- Berechnung der Strecke DH:

Für die Strecke $\overline{DH}$ gilt (siehe Figur 4):

$$\overline{DH} = \overline{BG} + 1,7 \text{ cm.}$$

Für die Strecke $\overline{BG}$ gilt im Dreieck BGC:

$$\cos 44,1^\circ = \frac{\overline{BG}}{7,0} \quad | \cdot 7,0$$

$$\Leftrightarrow 5,03 = \overline{BG} \text{ bzw. } \overline{BG} = 5,03 \text{ cm}$$

Damit ist $\overline{DH} = 6,73 \text{ cm}$.

Einsetzen von $\delta_1 = 31^\circ$ und $\overline{DH} = 6,73 \text{ cm}$ in $\tan \delta_1 = \frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}$ ergibt:

$$\tan 31^\circ = \frac{\overline{CH}}{6,73} \quad | \cdot 6,73$$

$$\Leftrightarrow 4,04 = \overline{CH} \text{ bzw. } \overline{CH} = 4,04 \text{ cm}$$

Mit $\overline{CG} = 4,87 \text{ cm}$ und $\overline{CH} = 4,04 \text{ cm}$ erhält man schließlich: $\overline{GH} = 8,91 \text{ cm}$

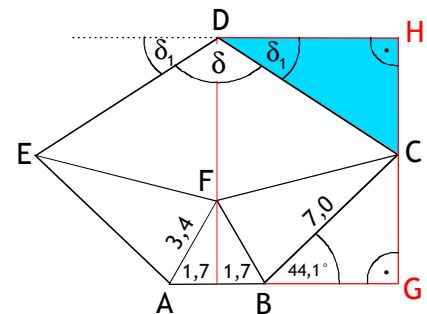
Ergebnis: Der Abstand des Punktes D zur Strecke $\overline{AB}$ beträgt **8,91 cm**.

Alternative Berechnung:

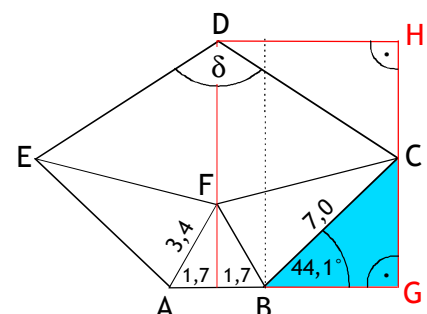
Man kann den Abstand des Punktes D von $\overline{AB}$ auch mithilfe der Hilfslinie $\overline{EC}$ bestimmen (siehe Figur 5). In Figur 5 ist der Abstand von D zur Strecke $\overline{AB}$ die Summe $\overline{DM} + \overline{FM}$ + Höhe h des Dreiecks ABF. Die Höhe h des gleichseitigen Dreiecks ABF ist $h = 2,94 \text{ cm}$ (siehe Formelsammlung). Die Strecken $\overline{FM}$ und $\overline{DM}$ können in den Dreiecken FCM und MCD berechnet werden, wenn man den Winkel α kennt. Aus Symmetriegründen gilt:

$$\alpha + \beta_2 + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 74,1^\circ \text{ (mit } \beta_2 = 75,9^\circ, \text{ siehe oben Seite 12).}$$

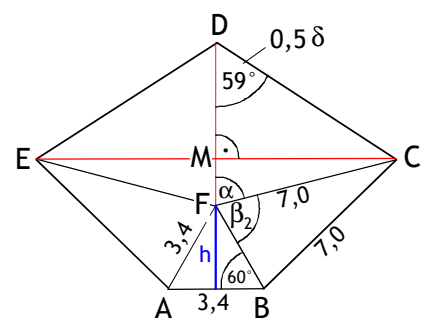
Man erhält bei diesem Rechenweg das gleiche Ergebnis: **8,91 cm.**



Figur 3



Figur 4



Figur 5

Die Zwischenergebnisse sind: $\overline{FM} = 1,92 \text{ cm}$, $\overline{MC} = 6,73 \text{ cm}$, $\overline{DM} = 4,05 \text{ cm}$ und $h = 2,94 \text{ cm}$.

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1b:

Lösungsübersicht:

Das Viereck $GBCA'$ ist ein Trapez. Für dessen Flächeninhalt gilt (siehe Formelsammlung):

$$A_{GBCA'} = \frac{1}{2} (\overline{A'C} + \overline{BG}) \cdot \overline{BC}, \text{ mit der Trapezhöhe } \overline{BC} = 21,0 \text{ cm.}$$

Zur Berechnung der Strecken $\overline{A'C}$ und $\overline{BG}$ muss man beachten, dass die Dreiecke AGF und $GA'F$ deckungsgleich sind; das heißt, sie haben die gleichen Innenwinkel und Seitenlängen (siehe Figur 2).

• Für die Strecke $\overline{A'C}$ gilt: $\overline{A'C} = 29,7 \text{ cm} - \overline{DA'}$. Die Strecke $\overline{DA'}$ kann im Dreieck $A'DF$ mit dem Satz des Pythagoras und $\overline{A'F} = \overline{AF} = 13,3 \text{ cm}$ und $\overline{DF} = 21,0 \text{ cm} - 13,3 \text{ cm} = 7,7 \text{ cm}$ berechnet werden (siehe Figur 1).

• Für die Strecke $\overline{BG}$ gilt: $\overline{BG} = 29,7 \text{ cm} - \overline{AG}$, mit $\overline{AG} = \overline{A'G}$. Die Strecke $\overline{A'G}$ kann im Dreieck $GA'F$ mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel β kennt (siehe Figur 2). Für den Winkel β gilt: $2\beta + \gamma = 180^\circ$ (siehe Figur 3). Der Winkel γ wiederum kann im Dreieck $A'DF$ mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 4).

Berechnung des Flächeninhalts des Vierecks $GBCA'$:

Das Viereck $GBCA'$ ist ein Trapez. Für dessen Flächeninhalt gilt: $A_{GBCA'} = \frac{1}{2} (\overline{A'C} + \overline{BG}) \cdot \overline{BC}$.

Mit der Trapezhöhe $\overline{BC} = 21,0 \text{ cm}$ folgt: $A_{GBCA'} = \frac{1}{2} (\overline{A'C} + \overline{BG}) \cdot 21,0 \text{ cm}$

→ Berechnung der Strecke $\overline{A'C}$:

Für die Strecke $\overline{A'C}$ gilt: $\overline{A'C} = 29,7 \text{ cm} - \overline{DA'}$.

Die Strecke $\overline{DA'}$ kann im Dreieck $A'DF$ mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 1). Es gilt:

$$\overline{DA'}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{A'F}^2.$$

Mit $\overline{A'F} = \overline{AF} = 13,3 \text{ cm}$ und

$\overline{DF} = 21,0 \text{ cm} - 13,3 \text{ cm} = 7,7 \text{ cm}$ folgt:

$$\overline{DA'}^2 + 7,7^2 = 13,3^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{DA'}^2 + 59,29 = 176,89 \quad | -59,29$$

$$\Leftrightarrow \overline{DA'}^2 = 117,6 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \overline{DA'} = 10,84 \text{ cm}$$

Damit erhält man für $\overline{A'C} = 29,7 \text{ cm} - \overline{DA'}$:

$$\overline{A'C} = 18,86 \text{ cm}$$

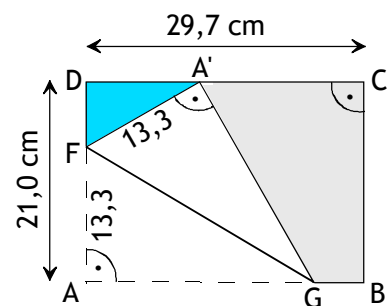
→ Berechnung der Strecke $\overline{BG}$:

Für die Strecke $\overline{BG}$ gilt (s. Figur 2): $\overline{BG} = 29,7 \text{ cm} - \overline{AG}$

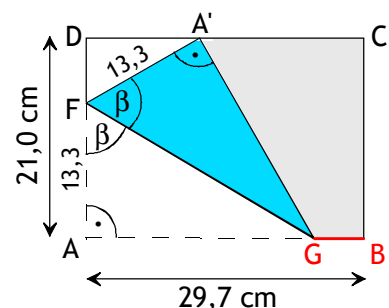
Weil das Dreieck AGF entlang von FG gefaltet wird, gilt

$\overline{AG} = \overline{A'G}$. Für die Strecke $\overline{A'G}$ gilt im Dreieck $GA'F$:

$$\tan \beta = \frac{\overline{A'G}}{13,3}$$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W1/W2



Für den Winkel β gilt: $2\beta + \gamma = 180^\circ$ (siehe Figur 3).

Der Winkel γ wiederum kann im Dreieck $A'DF$ mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 4).

$$\text{Darin gilt: } \cos \gamma = \frac{7,7}{13,3} \Rightarrow \gamma = 54,6^\circ$$

$$\text{Damit erhält man: } 2\beta + 54,6^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \underline{\beta = 62,7^\circ}$$

$$\text{Einsetzen von } \beta = 62,7^\circ \text{ in } \tan \beta = \frac{\overline{A'G}}{13,3} \text{ ergibt:}$$

$$\tan 62,7^\circ = \frac{\overline{A'G}}{13,3} \quad | \cdot 13,3$$

$$\Leftrightarrow 25,77 = \overline{A'G} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\overline{A'G} = 25,77 \text{ cm}}$$

$$\text{Damit ist auch } \underline{\overline{AG} = 25,77 \text{ cm.}}$$

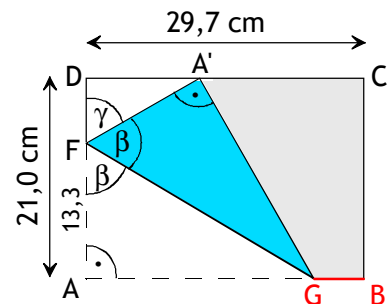
Und für $\overline{BG} = 29,7 \text{ cm} - \overline{AG}$ folgt schließlich:

$$\underline{\overline{BG} = 3,93 \text{ cm}}$$

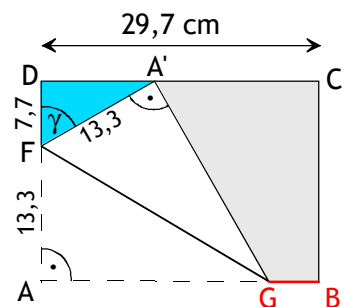
Einsetzen von $\overline{A'C} = 18,86 \text{ cm}$ und $\overline{BG} = 3,93 \text{ cm}$ in die Formel

$$A_{\text{GBCA}'} = \frac{1}{2} (\overline{A'C} + \overline{BG}) \cdot 21,0 \text{ cm} \text{ ergibt schließlich: } \underline{A_{\text{GBCA}'} = 239,3 \text{ cm}^2}$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Vierecks GBCA' beträgt $A_{\text{GBCA}'} = 239,3 \text{ cm}^2$.



Figur 3



Figur 4

Aufgabe W2a:

Lösungsübersicht:

- Für die **Pyramidenhöhe** h gilt: $h = 2 \overline{DM}$, wobei $\overline{DM}$ der Abstand des Punktes M von der Grundfläche der Pyramide ist (siehe Figur 1). Die Strecke $\overline{DM}$ kann im rechtwinkligen Dreieck DM_1M mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Strecken $\overline{DM_1}$ und $\overline{M_1M}$ kennt (siehe Figur 1). Die Strecke $\overline{M_1M}$ ist die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks BM_1M und kann mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

Die Strecke $\overline{DM_1}$ ist die Höhe h_1 eines der fünf gleichschenkligen Dreiecke der Grundfläche und kann mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Dazu werden der Winkel bei D ($360^\circ : 5 = 72^\circ$) und die Kantenlänge a benötigt. Die Kantenlänge a wiederum kann im Dreieck BM_1M mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

- Den **kleinsten Flächeninhalt** hat das Dreieck BCM' , wenn M' in der Grundfläche der Pyramide liegt, also mit dem Punkt D zusammenfällt (siehe Figur 4). Zur Berechnung dieses Flächeninhalts benötigt man die Dreieckshöhe $h_1 = \overline{DM_1}$ und die Grundseite a . Beide Längen wurden bereits im ersten Aufgabenteil berechnet.

- Den **größten Flächeninhalt** hat das Dreieck BCM' , wenn M' mit der Pyramidenspitze S zusammenfällt (siehe Figur 5). Zur Berechnung dieses Flächeninhalts benötigt man die Dreieckshöhe $h_a = \overline{M_1S}$ und die Grundseite a , die bereits im ersten Aufgabenteil berechnet wurde. Die Strecke $\overline{M_1S}$ kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 6).

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W2



Berechnung der Pyramidenhöhe:

Für die Pyramidenhöhe h gilt: $0,5h = \overline{DM}$ bzw. $h = 2 \overline{DM}$ (siehe Figur 1)

Die Strecke $\overline{DM}$ kann im rechtwinkligen Dreieck DM_1M mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Es gilt (s. Figur 1): $(0,5h)^2 + \overline{DM_1}^2 = \overline{M_1M}^2$

→ Berechnung der Strecke $\overline{M_1M}$:

Die Strecke $\overline{M_1M}$ ist die Höhe im gleichschenkligen Dreieck BCM . Sie halbiert die Strecke $\overline{BC}$ und den Winkel $\varepsilon = 48^\circ$ (siehe Figur 2). Im markierten Dreieck der Figur 2 gilt:

$$\cos 24^\circ = \frac{\overline{M_1M}}{8,0} \quad | \cdot 8,0$$

$$\Leftrightarrow 7,31 = \overline{M_1M} \quad \text{bzw.} \quad \overline{M_1M} = 7,31 \text{ cm}$$

→ Berechnung der Strecke $\overline{DM_1}$:

Die Strecke $\overline{DM_1}$ ist die Höhe h_1 eines der 5 gleichschenkligen Dreiecke der Grundfläche und kann mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Man beachte, dass $\overline{DM_1}$ die Grundseite a und den Winkel $\delta = 360^\circ : 5 = 72^\circ$ halbiert. Im Dreieck BM_1D gilt (siehe Figur 3):

$$\tan 36^\circ = \frac{0,5a}{\overline{DM_1}}$$

Die Grundseite a wiederum kann im markierten Dreieck BM_1M der Figur 2 mit der Sinusfunktion berechnet werden.

$$\text{Es gilt: } \sin 24^\circ = \frac{0,5a}{8,0} \quad | \cdot 8,0$$

$$\Leftrightarrow 3,25 = 0,5a \quad | : 0,5$$

$$\Leftrightarrow 6,5 = a \quad \text{bzw.} \quad \underline{a = 6,5 \text{ cm}}$$

Einsetzen von $a = 6,5 \text{ cm}$ in $\tan 36^\circ = \frac{0,5a}{\overline{DM_1}}$ ergibt:

$$\tan 36^\circ = \frac{3,25}{\overline{DM_1}} \quad | \cdot \overline{DM_1}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DM_1} \tan 36^\circ = 3,25 \quad | : \tan 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow \underline{\overline{DM_1} = 4,47 \text{ cm}}$$

Einsetzen von $\overline{M_1M} = 7,31 \text{ cm}$ und $\overline{DM_1} = 4,47 \text{ cm}$ in $(0,5h)^2 + \overline{DM_1}^2 = \overline{M_1M}^2$ ergibt:

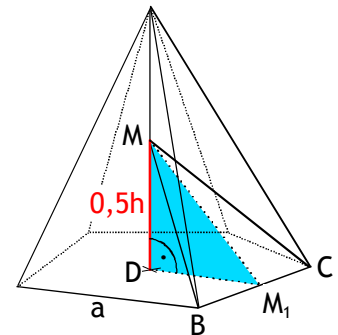
$$(0,5h)^2 + 19,98 = 53,44 \quad | -19,98$$

$$\Leftrightarrow (0,5h)^2 = 33,46 \quad | \sqrt{\quad}$$

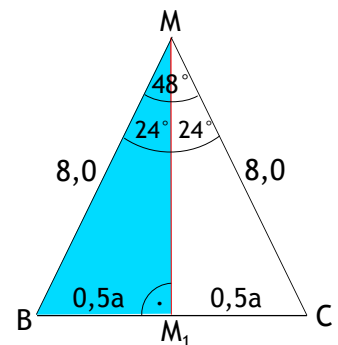
$$\Rightarrow 0,5h = 5,78 \quad | : 0,5$$

$$\Leftrightarrow \underline{h = 11,56 \text{ cm}}$$

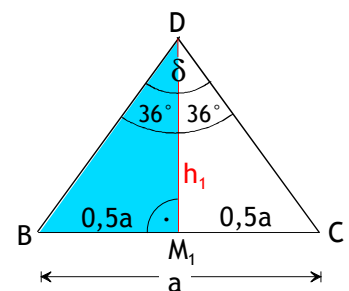
Ergebnis: Die Höhe der Pyramide beträgt $h = 11,56 \text{ cm}$.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W2



Der minimale und maximale Flächeninhalt des Dreiecks BCM':

- Am kleinsten wird der Flächeninhalt des Dreiecks BCM', wenn M' in der Grundfläche der Pyramide liegt, also mit dem Punkt D zusammenfällt (siehe Figur 4). Dann gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks BCM':

$$A_{\min} = \frac{1}{2} a \cdot \overline{DM_1}.$$

Mit $a = 6,5 \text{ cm}$ und $\overline{DM_1} = 4,47 \text{ cm}$ (siehe oben) folgt: $A_{\min} = 14,5 \text{ cm}^2$

- Am größten wird der Flächeninhalt des Dreiecks BCM', wenn M' mit der Pyramidenspitze S zusammenfällt (siehe Figur 5). Dann gilt für den

Flächeninhalt des Dreiecks BCM': $A_{\max} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$; mit $a = 6,5 \text{ cm}$

Die Seitenhöhe h_a des Dreiecks BCS kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden (siehe Figur 6). Es gilt: $h_a^2 = h^2 + \overline{DM_1}^2$

Die Pyramidenhöhe $h = 11,56 \text{ cm}$ und die Strecke $\overline{DM_1} = 4,47 \text{ cm}$ wurden bereits oben berechnet. Damit folgt:

$$\begin{aligned} h_a^2 &= (11,56 \text{ cm})^2 + (4,47 \text{ cm})^2 \\ \Leftrightarrow h_a^2 &= 153,61 \text{ cm}^2 \quad | \sqrt{} \\ \Rightarrow h_a &= 12,39 \text{ cm} \end{aligned}$$

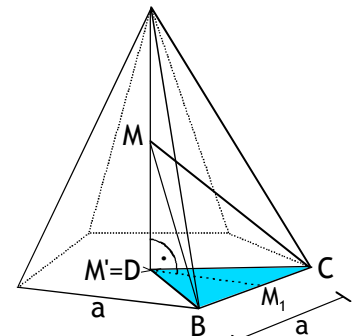
Damit erhält man für $A_{\max} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$:

$$A_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (6,5 \text{ cm}) \cdot (12,39 \text{ cm}) = 40,3 \text{ cm}^2$$

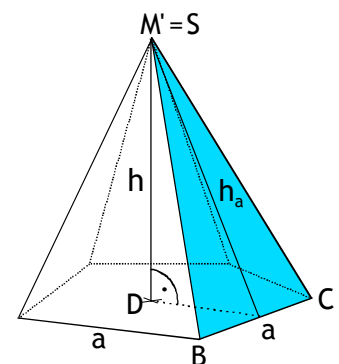
Ergebnis:

Der **minimale Flächeninhalt** des Dreiecks BCM' beträgt $A_{\min} = 14,5 \text{ cm}^2$.

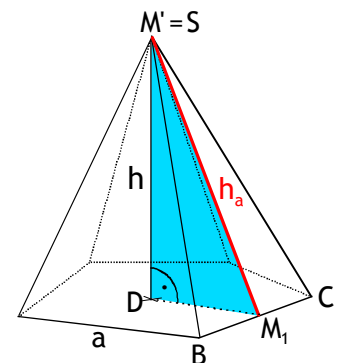
Der **maximale Flächeninhalt** des Dreiecks BCM' beträgt $A_{\max} = 40,3 \text{ cm}^2$.



Figur 4



Figur 5



Figur 6

Aufgabe W2b:

Lösungsübersicht:

- Zur Berechnung des **Zylindervolumens** benötigt man den Zylinderradius r_{zyl} und die Zylinderhöhe h_{zyl} . Beide Längen kann man der Zeichnung entnehmen (siehe Figur 1).
- Um das **Volumen des aufgesetzten Kegels** berechnen zu können, benötigt man den Radius r_{ke} des Grundkreises und die Kegelhöhe h_{ke} . Den Kegelradius r_{ke} erhält man, indem man vom Zylinderradius $r_{\text{zyl}} = 3e$ die Strecke x abzieht (siehe Figur 2). Die Strecke x kann man in dem markierten Dreieck der Figur 3 mit der Tangensfunktion bestimmen. Die Kegelhöhe h_{ke} ist die Differenz zwischen der Höhe h_D des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $6e$ und der Zylinderhöhe $h_{\text{zyl}} = e\sqrt{3}$ (siehe Figur 4). Die Formel für die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks kann in der Formelsammlung nachgeschlagen werden. (Hinweis: Das Dreieck mit der Grundseite $6e$ ist deshalb gleichseitig, weil der obere Winkel 60° beträgt und das Dreieck aus Symmetriegründen gleichschenkelig ist. Daher müssen auch die beiden Basiswinkel jeweils 60° betragen (siehe Figur 2 und 4).)

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W2



Das Volumen des zusammengesetzten Körpers:

- Für das Zylindervolumen gilt (siehe Formelsammlung): $V_{\text{Zyl}} = \pi \cdot r_{\text{Zyl}}^2 \cdot h_{\text{Zyl}}$

Der Zeichnung entnimmt man (siehe Figur 1): $r_{\text{Zyl}} = 3e$ und $h_{\text{Zyl}} = e\sqrt{3}$
Damit folgt:

$$V_{\text{Zyl}} = \pi \cdot (3e)^2 \cdot e\sqrt{3} = \pi \cdot 9e^2 \cdot e\sqrt{3} = 9\pi e^3 \sqrt{3}$$

- Für das Kegelvolumen gilt (siehe Formelsammlung): $V_{\text{Ke}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r_{\text{Ke}}^2 \cdot h_{\text{Ke}}$

→ Berechnung des Kegelradius' r_{Ke} :

Für den Kegelradius gilt (siehe Figur 2): $r_{\text{Ke}} = 3e - x$

Die Strecke x kann in dem markierten Dreieck der Figur 3 berechnet werden. Darin gilt:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{e\sqrt{3}} \quad | \cdot e\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow e\sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ = x \quad \text{bzw.} \quad x = e\sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ$$

Mit $\tan 30^\circ = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ (siehe Formelsammlung) folgt:

$$x = e\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{3} = e \cdot \frac{1}{3} \sqrt{3}^2 = e \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = e$$

Damit erhält man für den Kegelradius: $r_{\text{Ke}} = 2e$

→ Berechnung der Kegelhöhe h_{Ke} :

Für die Kegelhöhe gilt (siehe Figur 4):

$h_{\text{Ke}} = h_D - e\sqrt{3}$; wobei h_D die Höhe des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $6e$ ist.

Für h_D gilt (siehe Formelsammlung): $h_D = \frac{6e}{2} \sqrt{3} = 3e\sqrt{3}$

Damit folgt: $h_{\text{Ke}} = 3e\sqrt{3} - e\sqrt{3} = 2e\sqrt{3}$

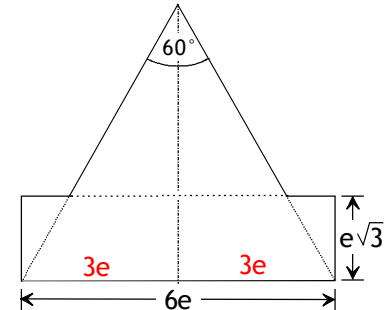
Einsetzen von $r_{\text{Ke}} = 2e$ und $h_{\text{Ke}} = 2e\sqrt{3}$ in $V_{\text{Ke}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r_{\text{Ke}}^2 \cdot h_{\text{Ke}}$ ergibt:

$$V_{\text{Ke}} = \frac{1}{3} \pi \cdot (2e)^2 \cdot 2e\sqrt{3} = \frac{1}{3} \pi \cdot 4e^2 \cdot 2e\sqrt{3} = \frac{1}{3} \pi \cdot 8e^3 \sqrt{3} = \frac{8}{3} \pi \cdot e^3 \sqrt{3}$$

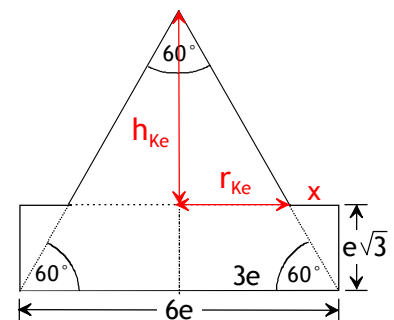
Für das Volumen des zusammengesetzten Körpers $V_{\text{ges}} = V_{\text{Zyl}} + V_{\text{Ke}}$ erhält man somit:

$$V_{\text{ges}} = 9\pi e^3 \sqrt{3} + \frac{8}{3} \pi \cdot e^3 \sqrt{3} = \left(9 + \frac{8}{3}\right) \pi e^3 \sqrt{3} = \frac{35}{3} \pi \cdot e^3 \sqrt{3}$$

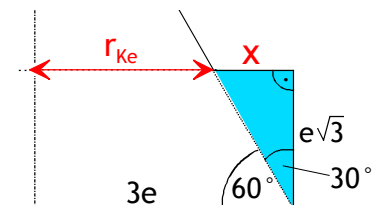
Was zu zeigen war.



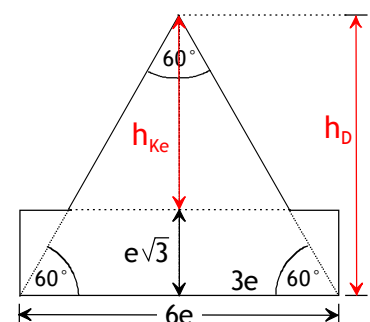
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W3



Aufgabe W3a:

Lösungsübersicht:

- Um die **Koordinaten des Punktes T** berechnen zu können, benötigt man die Funktionsgleichungen der Normalparabeln p_1 und p_2 . Die Funktionsgleichung der Normalparabel p_1 kann man mithilfe ihres Scheitelpunkts $S_1(2|2)$ und der Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ bestimmen. Die Funktionsgleichung von p_2 hat die allgemeine Form $y = ax^2 + c$, weil ihre Nullstellen $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$ und damit auch ihr Graph symmetrisch zur y-Achse sind. Und weil p_2 eine nach unten geöffnete *Normalparabel* ist, muss $a = -1$ sein. Den Wert von c erhält man dann durch Einsetzen der Koordinaten einer der beiden Nullstellen $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$. Durch Gleichsetzen beider Parabelgleichungen kann man dann die x-Koordinate von T berechnen und daraus auch die y-Koordinate von T.
- Für die **Gleichung der Geraden g** gilt mit $m = 2$: $y = 2 \cdot x + c$. Den Wert des y-Achsenabschnitts c erhält man, indem man die Koordinaten des Punktes T in diese Gleichung einsetzt.
- Um die **Winkel** zu berechnen, unter denen sich die Gerade g und die y-Achse schneiden, sollte man die Gerade g zunächst skizzieren (siehe Figur 1). Anhand der Skizze wird klar, dass man den spitzen Schnittwinkel mit der Tangensfunktion berechnen kann, wenn man die Achsenabschnitte der Geraden g kennt. Der y-Achsenabschnitt von g ist b . Der x-Achsenabschnitt der Geraden g ist die x-Koordinate ihrer Nullstelle (siehe Figur 1). Der stumpfe Schnittwinkel kann aus dem spitzen Schnittwinkel bestimmt werden, da beide Winkel zusammen 180° ergeben müssen.
- Die **Gleichung einer Parabel p_3** , die weder mit p_1 noch mit p_2 einen Punkt gemeinsam hat, sollte man anhand einer Skizze der Parabeln p_1 und p_2 ermitteln. Darin wird deutlich, dass p_3 eine nach oben geöffnete Parabel sein muss, die gegenüber p_1 nach oben verschoben ist und mindestens genauso schmal verlaufen muss wie p_1 (siehe Figur 2). Genauso kann p_3 aber auch eine nach unten geöffnete Parabel sein, die gegenüber p_2 nach unten verschoben ist und mindestens genauso schmal verläuft wie p_2 (siehe Figur 2).

Berechnung der Koordinaten des Punktes T:

→ Die Funktionsgleichung von p_1 :

Einsetzen der Koordinaten des Scheitelpunkts $S_1(2|2)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ ergibt:

$$y = (x - 2)^2 + e$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 4 + 2$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 6$$

Die Gleichung von p_1 ist also: $y = x^2 - 4x + 6$

→ Die Funktionsgleichung von p_2 :

Die Normalparabel p_2 ist symmetrisch zur y-Achse, weil ihre Nullstellen $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$ symmetrisch zur y-Achse sind. Sie hat daher die allgemeine Form: $y = ax^2 + c$.

Da p_2 eine nach unten geöffnete Normalparabel ist, muss $a = -1$ sein.

Damit erhält man die unvollständige Gleichung: $y = -1x^2 + c$ bzw. $y = -x^2 + c$

Durch Einsetzen der Koordinaten einer der beiden Nullstellen kann man den Wert von c berechnen. Mit $N_2(2|0)$ folgt: $0 = -(2)^2 + c \Leftrightarrow 0 = -4 + c \Leftrightarrow c = 4$

Damit ist p_2 : $y = -x^2 + 4$.

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W3



Gleichsetzen von p_1 und p_2 ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 6 &= -x^2 + 4 & | +x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 &= 0 & | :2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Mit der Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$$x_1 = \frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1} = 1 \text{ und } x_2 = \frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1} = 1$$

Wegen $x_1 = x_2$ haben die Parabeln p_1 und p_2 nur *einen* gemeinsamen Punkt. Dessen x-Koordinate ist $x_1 = 1$. Die y-Koordinate von T erhält man durch Einsetzen von $x_1 = 1$ in die Gleichung von p_1 oder p_2 .

Einsetzen von $x_1 = 1$ in p_1 : $y = x^2 - 4x + 6$ ergibt: $y_1 = 1^2 - 4 + 6 = 3 \Rightarrow T(1|3)$

Ergebnis: Der gemeinsame Punkt T der beiden Parabeln hat die Koordinaten **T(1|3)**.

Die Gleichung der Geraden g:

Die allgemeine Gleichung einer Geraden ist $y = mx + c$. Mit $m = 2$ erhält man: $y = 2x + c$

Den Wert von c erhält man durch Einsetzen der Koordinaten von T(1|3):

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \cdot 1 + c \\ \Leftrightarrow 3 &= 2 + c & | -2 \\ \Leftrightarrow 1 &= c \text{ bzw. } c = 1 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Gleichung der Geraden g ist **$y = 2x + 1$** .

Die Winkel, unter denen sich die Gerade g und die y-Achse schneiden:

Die gesuchten Schnittwinkel α und β können anhand der Achsenabschnitte von g mit der Tangensfunktion bestimmt werden (siehe Figur 1).

Der y-Achsenabschnitt von g ist $c = 1$.

Den x-Achsenabschnitt von g erhält man, indem man in $y = 2x + 1$ für $y = 0$ setzt und nach x umstellt:

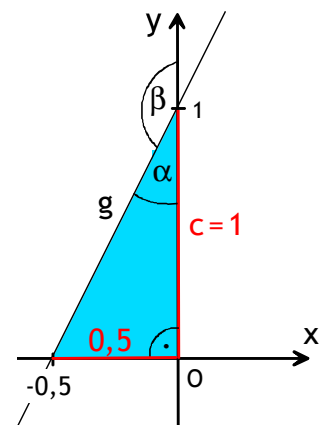
$$\begin{aligned} 0 &= 2x + 1 & | -1 \\ \Leftrightarrow -1 &= 2x & | :2 \\ \Leftrightarrow -0,5 &= x \text{ bzw. } x = -0,5 \end{aligned}$$

Im markierten Dreieck der Figur 1 gilt also: $\tan \alpha = \frac{0,5}{1} \Rightarrow \alpha = 26,6^\circ$

Für den stumpfen Winkel β gilt: $\beta = 180^\circ - 26,6^\circ = 153,4^\circ$

Ergebnis:

Die Gerade g und die y-Achse schneiden sich unter den Winkeln **$\alpha = 26,6^\circ$** und **$\beta = 153,4^\circ$** .



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W3



Die Gleichung einer Parabel p_3 , die weder mit p_1 noch mit p_2 einen Punkt gemeinsam hat:

Anhand einer Skizze der Parabeln p_1 und p_2 erkennt man, dass es für die Parabel p_3 folgende Möglichkeiten gibt (siehe Figur 2):

- Entweder ist die Parabel p_3 gegenüber der Parabel p_1 nach oben verschoben und mindestens genauso schmal wie p_1 . Eine mögliche Gleichung wäre dann:

$$p_3: y = (x - 2)^2 + 2 + 2 = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$$

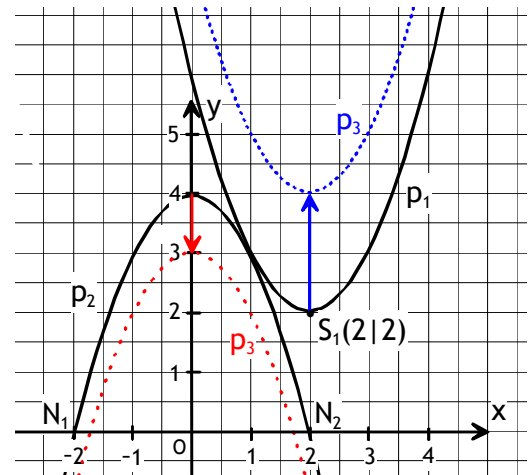
(Hinweis: Alle möglichen Gleichungen für p_3 sind in diesem Fall: $y = a \cdot (x - 2)^2 + 2 + c$; mit $a \geq 1$ und $c > 0$.)

- Oder die Parabel p_3 ist gegenüber der Parabel p_2 nach unten verschoben und ist mindestens genauso schmal wie p_2 . Eine mögliche Gleichung wäre dann:

$$p_3: y = -x^2 + 4 - 1 = -x^2 + 3$$

(Hinweis: Alle möglichen Gleichungen für p_3 sind in diesem Fall: $y = -ax^2 + 4 - c$; mit $a \geq 1$ und $c > 0$.)

Ergebnis: Mögliche Gleichungen für p_3 sind: $y = (x - 2)^2 + 4$ oder $y = -x^2 + 3$.



Figur 2

Aufgabe W3b:

Lösungsübersicht:

- Um die **Koordinaten des zweiten Schnittpunkts A** von p_1 und p_2 berechnen zu können, benötigt man die Funktionsgleichungen der Parabeln p_1 und p_2 . Den Wert von c in $p_1: y = ax^2 + c$ kann man mit dem angegebenen Scheitelpunkt $S_1(0|6)$ bestimmen: $c = 6$. Den Wert von a erhält man durch Einsetzen der Koordinaten von $B(2|4)$. Entsprechend erhält man den Wert von q in $p_2: y = x^2 + 3x + q$ durch Einsetzen der Koordinaten von $B(2|4)$. Durch Gleichsetzen beider Parabelgleichungen kann dann die x -Koordinate des zweiten Schnittpunkts A und daraus dessen y -Koordinate berechnet werden.
- Für den **Nachweis**, dass die Punkte A, B und $C(0|2)$ auf einer Geraden liegen, muss man zunächst die Gleichung der Geraden durch $B(2|4)$ und $C(0|2)$ aufstellen und dann eine Punktprobe mit A machen.

Berechnung der Koordinaten des zweiten Schnittpunkts A:

→ Die Funktionsgleichung von p_1 :

Den Wert von c in $y = ax^2 + c$ erhält man sofort mit dem Scheitelpunkt $S_1(0|6)$: $c = 6$

Damit ist $p_1: y = ax^2 + 6$. Einsetzen der Koordinaten des Punktes $B(2|4)$ in $y = ax^2 + 6$ ergibt:

$$4 = a \cdot (2)^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow 4 = 4a + 6 \quad | -6$$

$$\Leftrightarrow -2 = 4a \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow -0,5 = a \text{ bzw. } a = -0,5. \text{ Die Gleichung von } p_1 \text{ ist also: } y = -0,5x^2 + 6$$

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W3



→ Die Funktionsgleichung von p_2 :

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $B(2|4)$ in $y = x^2 + 3x + q$ ergibt:

$$4 = (2)^2 + 3 \cdot 2 + q$$

$$\Leftrightarrow 4 = 4 + 6 + q$$

$$\Leftrightarrow 4 = 10 + q \quad | -10$$

$$\Leftrightarrow -6 = q \text{ bzw. } q = -6. \text{ Die Gleichung von } p_2 \text{ ist also: } y = x^2 + 3x - 6$$

Gleichsetzen von p_1 und p_2 ergibt:

$$x^2 + 3x - 6 = -0,5x^2 + 6 \quad | +0,5x^2 - 6$$

$$\Leftrightarrow 1,5x^2 + 3x - 12 = 0 \quad | :1,5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind: $x_1 = \frac{-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 8} = 2$ und $x_2 = \frac{-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 8} = -4$

$x_1 = 2$ ist die x-Koordinate von $B(2|4)$. $x_2 = -4$ ist die x-Koordinate von A. Die y-Koordinate von $A(-4|y_2)$ erhält man durch Einsetzen von $x_2 = -4$ in die Gleichung von p_1 oder p_2 .

Einsetzen von $x_2 = -4$ in $p_2: y = x^2 + 3x - 6$ ergibt: $y_2 = (-4)^2 + 3 \cdot (-4) - 6 = -2 \Rightarrow A(-4|-2)$

Ergebnis: Der zweite Schnittpunkt A der beiden Parabeln hat die Koordinaten $A(-4|-2)$.

Der Nachweis, dass die Punkte A, B(2|4) und C(0|2) auf einer Geraden liegen:

Zunächst muss die Gleichung der Geraden durch zwei dieser drei Punkte, zum Beispiel durch $B(2|4)$ und $C(0|2)$, aufgestellt werden:

Durch Einsetzen der Koordinaten von $B(2|4)$ und $C(0|2)$ in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

Mit $B(2|4)$: $4 = m \cdot (2) + c \Leftrightarrow 4 = 2m + c \quad (I)$

Mit $C(0|2)$: $2 = m \cdot 0 + c \Leftrightarrow 2 = c \text{ bzw. } c = 2 \quad (II)$

Einsetzen von $c = 2$ in (I) $4 = 2m + c$ ergibt:

$$4 = 2m + 2 \quad | -2$$

$$\Leftrightarrow 2 = 2m \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow 1 = m \text{ bzw. } m = 1$$

Die Gleichung der Geraden durch die Punkte $B(2|4)$ und $C(0|2)$ ist also: $y = 1x + 2$ bzw. $y = x + 2$

Eine Punktprobe mit $A(-4|-2)$ ergibt: $-2 = -4 + 2$

$$\Leftrightarrow -2 = -2$$

Das ist eine wahre Aussage. Also liegt auch der Punkt A auf der Geraden durch B und C. Somit liegen alle drei Punkte auf einer Geraden. Was zu zeigen war.



Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W4

Aufgabe W4a:

Lösungsübersicht:

- Um den **Erwartungswert** berechnen zu können, benötigt man die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse „*Augensumme gleich 4*“ und „*Augensumme kleiner 4*“. Dazu muss man sich zunächst die Ergebnisse überlegen, die jeweils zu diesen beiden Ereignissen gehören. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ergebnisse können mit der Produktregel berechnet werden.
- Um zu entscheiden, ob man den rechten Würfel mit **drei Einsen oder drei Dreien** ergänzen soll, muss man mit den neuen Wahrscheinlichkeiten bei drei Einsen bzw. bei drei Dreien jeweils den neuen Erwartungswert berechnen. Der Rechenweg ist dabei genau der gleiche wie im ersten Aufgabenteil.

Berechnung des Erwartungswerts (aus Sicht des Betreibers):

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „*Augensumme gleich 4*“ sei $P(AS = 4)$.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „*Augensumme kleiner 4*“ sei $P(AS < 4)$.

Für den Erwartungswert E aus Sicht des Betreibers gilt dann (siehe Formelsammlung):

$$E = 1 \text{ €} - P(AS = 4) \cdot 4,00 \text{ €} - P(AS < 4) \cdot 2,00 \text{ €} - P(AS > 4) \cdot 0 \text{ €}$$

$$\Leftrightarrow E = 1 \text{ €} - P(AS = 4) \cdot 4,00 \text{ €} - P(AS < 4) \cdot 2,00 \text{ €}$$

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(AS = 4)$ und $P(AS < 4)$, muss man sich überlegen, welche Ergebnisse zu den Ereignissen „*Augensumme gleich 4*“ und „*Augensumme kleiner 4*“ gehören:

Die Ergebnisse zum Ereignis „*Augensumme gleich 4*“ sind: (1; 3), (2; 2) und (3; 1)

Die Ergebnisse zum Ereignis „*Augensumme kleiner 4*“: (1; 1), (1; 2) und (2; 1)

(Hinweis: In der Schreibweise „(1; 3)“, „(2; 2)“ usw. gibt die linke Ziffer jeweils die Augenzahl des linken Spielwürfels an und die rechte Ziffer die Augenzahl des rechten Spielwürfels.)

Die Wahrscheinlichkeit $P(AS > 4)$ muss nicht berechnet werden, weil in diesem Fall kein Gewinn ausgezahlt wird.

$$\text{Mit der Produktregel erhält man: } P(1; 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} ; P(2; 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ und } P(3; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\text{Mit der Summenregel folgt: } P(AS = 4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

$$\text{Ganz entsprechend erhält man: } P(1; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} ; P(1; 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ und } P(2; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\text{Und mit der Summenregel: } P(AS < 4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

$$\text{Damit folgt für den Erwartungswert: } E = 1 \text{ €} - \frac{3}{36} \cdot 4,00 \text{ €} - \frac{3}{36} \cdot 2,00 \text{ €} = 0,50 \text{ €}$$

Ergebnis: Der Erwartungswert beträgt (aus Sicht des Betreibers) 0,50 €.

Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W4



Die Entscheidung des Betreibers, ob er drei Einsen oder drei Dreien nehmen soll:

→ Erwartungswert bei drei Einsen:

Wenn der Betreiber beim rechten Spielwürfel die Vier, die Fünf und die Sechs durch **drei Einsen** ersetzt, ist die Wahrschein-

lichkeit für die Augenzahl „1“ beim rechten Würfel $\frac{4}{6}$.

Damit sind die neuen Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse zu den Ereignissen „*Augensumme* = 4“ bzw. „*Augensumme kleiner 4*“ folgende:

$$P(1; 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} ; P(2; 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ und } P(3; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{36} \Rightarrow P_1(AS = 4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{6}{36}$$

$$P(1; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{36} ; P(1; 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ und } P(2; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{36} \Rightarrow P_1(AS < 4) = \frac{4}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36}$$

Mit den neuen Wahrscheinlichkeiten $P_1(AS=4) = \frac{6}{36}$ und $P_1(AS<4) = \frac{9}{36}$ erhält man für den neuen

$$\text{Erwartungswert: } E(3 \text{ Einsen}) = 1 \text{ €} - \frac{6}{36} \cdot 4,00 \text{ €} - \frac{9}{36} \cdot 2,00 \text{ €} = -\frac{1}{6} \text{ €} \approx -0,17 \text{ €}$$

→ Erwartungswert bei drei Dreien:

Wenn der Betreiber beim rechten Spielwürfel die Vier, die Fünf und die Sechs durch **drei Dreien** ersetzt, ist die Wahrschein-

lichkeit für die Augenzahl „3“ beim rechten Würfel $\frac{4}{6}$.

Damit sind die neuen Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse zu den Ereignissen „*Augensumme* = 4“ bzw. „*Augensumme kleiner 4*“ folgende:

$$P(1; 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{36} ; P(2; 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ und } P(3; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \Rightarrow P_3(AS = 4) = \frac{4}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36}$$

$$P(1; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} ; P(1; 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ und } P(2; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \Rightarrow P_3(AS < 4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

Mit den neuen Wahrscheinlichkeiten $P_3(AS=4) = \frac{6}{36}$ und $P_3(AS<4) = \frac{3}{36}$ erhält man für den neuen

$$\text{Erwartungswert: } E(3 \text{ Dreien}) = 1 \text{ €} - \frac{6}{36} \cdot 4,00 \text{ €} - \frac{3}{36} \cdot 2,00 \text{ €} = \frac{1}{6} \text{ €} \approx 0,17 \text{ €}$$

Der Erwartungswert ist also größer, wenn der Betreiber im rechten Würfel drei Dreien hinzufügt.

Ergebnis: Der Betreiber sollte die Vier, die Fünf und die Sechs durch **drei Dreien** ersetzen.

Argumentative Begründung:

Wenn man die Ergebnisse zu den Ereignissen „*Augensumme gleich 4*“ und „*Augensumme kleiner 4*“ genau betrachtet, erkennt man Folgendes:

In den Ergebnissen zum Ereignis „*Augensumme gleich 4*“ zeigt der rechte Würfel die Augenzahlen „3“ und „1“ jeweils einmal an: (1; **3**), (2; 2) und (3; **1**). Somit ist es für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „*Augensumme* = 4“ egal, ob man im rechten Würfel drei Einsen oder drei Dreien hinzufügt.

In den Ergebnissen zum Ereignis „*Augensumme kleiner 4*“ kommt die Augenzahl „3“ nicht vor. Dafür gibt es 2 Ergebnisse, bei denen der rechte Würfel die Augenzahl „1“ anzeigt: (1; **1**), (1; 2) und (2; **1**). Somit würde sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „*Augensumme kleiner 4*“ erhöhen, wenn im rechten Würfel drei Einsen hinzukommen. Dadurch würde sich der Erwartungswert verringern. Das wäre aber für den Betreiber ungünstiger. Stattdessen sollte der Betreiber im rechten Würfel drei Dreien hinzufügen.



Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W4

Aufgabe W4b:

Lösungsübersicht:

- Eine mögliche **Funktionsgleichung für die Parabel durch A und B** kann in der Form $y = ax^2 + c$ bestimmt werden, wenn man in der Skizze ein Achsenkreuz so einzeichnet, dass der Punkt T der Scheitelpunkt der Parabel ist und die Parabel symmetrisch zur y-Achse verläuft (siehe Figur 1). Wenn man außerdem den Boden der Rampe als x-Achse wählt, ist $c = 0,20$. Den Wert von a kann man durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes A bzw. B berechnen. Die Koordinaten der Punkte A und B erhält man mit den Längenangaben in der Skizze und der Tatsache, dass die Punkte A und B einen Abstand von 4,00 m voneinander haben (siehe Figur 1).
- Eine mögliche **Funktionsgleichung für die Gerade durch B und D** hat die Form $y = mx + b$. Die Steigung m und der y-Achsenabschnitt b können mit den Koordinaten der Punkte B und D bestimmt werden. Diese Koordinaten erhält man mit den Längenangaben in der Skizze und der Tatsache, dass die Punkten B und D den Abstand 8,00 m haben sollen (siehe Figur 2).

Eine mögliche Funktionsgleichung für die Parabel durch A und B:

Zunächst sollte man in die Skizze ein Achsenkreuz so eintragen, dass die Parabel durch A und B symmetrisch zur y-Achse verläuft (siehe Figur 1). Dann kann man die Parabel durch A und B mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ beschreiben. In Figur 1 hat der Scheitelpunkt T die Koordinaten $T(0|0,20)$.

Man beachte: 20 cm = 0,20 m

Damit erhält man:

$c = 0,20$ und die vorläufige Gleichung

$y = ax^2 + 0,2$.

Die Koordinaten der Punkte A und B sind in dem eingetragenen Achsenkreuz: $A(-2|1)$ und $B(2|1)$.

Einsetzen der Koordinaten von $B(2|1)$ in $y = a \cdot x^2 + 0,2$ ergibt:

$$1 = a \cdot (2)^2 + 0,2$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4a + 0,2 \quad | -0,2$$

$$\Leftrightarrow 0,8 = 4a \quad | :4$$

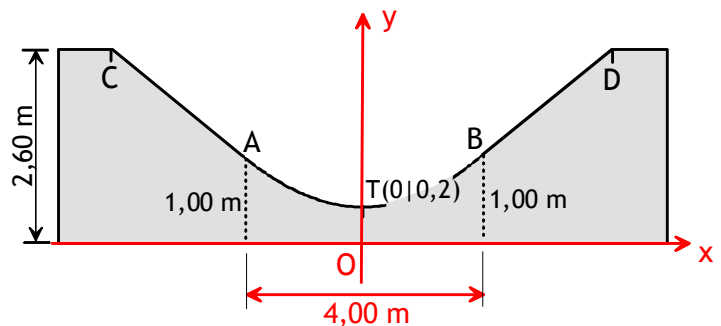
$$\Leftrightarrow 0,2 = a \text{ bzw. } a = 0,2$$

Damit ist: $y = 0,2x^2 + 0,2$ bzw. $y = \frac{1}{5}x^2 + 0,2$

(Hinweis: Zur Berechnung des a-Werts hätte man auch die Koordinaten von $A(-2|1)$ in $y = ax^2 + 0,2$ einsetzen können.)

Ergebnis: Eine mögliche Funktionsgleichung der Parabel durch A und B ist

$y = 0,2x^2 + 0,2$ bzw. $y = \frac{1}{5}x^2 + 0,2$.



Figur 1



Lösungen zur Prüfung 2019: Wahlbereich - Aufgabe W4

Eine mögliche Geradengleichung durch die Punkte B und D:

In dem eingezeichneten Achsenkreuz hat der Punkt D die Koordinaten $D(4|2,6)$ (siehe Figur 2). Die Koordinaten von B wurden bereits oben bestimmt: $B(2|1)$

Durch Einsetzen der Koordinaten von $B(2|1)$ und $D(4|2,6)$ in $y = mx + b$ erhält man:

Mit $B(2|1)$: $1 = m \cdot 2 + b \Leftrightarrow 1 = 2m + b \quad (I)$

Mit $D(4|2,6)$: $2,6 = m \cdot 4 + b \Leftrightarrow 2,6 = 4m + b \quad (II)$

$$(I) - (II) \text{ ergibt: } -1,6 = -2m \quad | :(-2)$$

$$\Leftrightarrow 0,8 = m \text{ bzw. } m = 0,8$$

Hinweise:

1.) Man kann die Steigung m auch mit der Zwei-Punkte-Form bestimmen: $m = \frac{2,6 - 1}{4 - 2} = 0,8 = \frac{4}{5}$

2.) Der y-Achsenabschnitt in der Geraden durch B und D wurde hier mit „b“ bezeichnet, weil der Buchstabe „c“ bereits für die Parabelgleichung $y = ax^2 + c$ reserviert war.

Einsetzen von $m = 0,8$ in $1 = 2m + b$ ergibt:

$$1 = 2 \cdot 0,8 + b$$

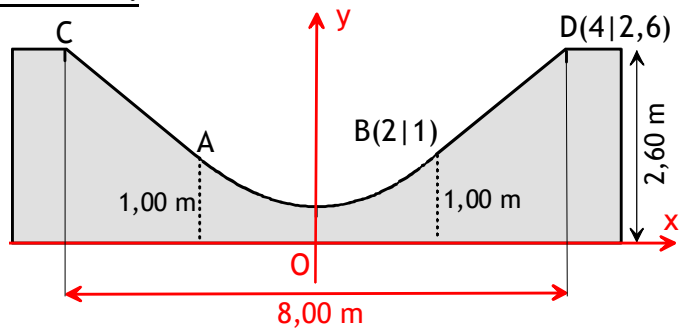
$$\Leftrightarrow 1 = 1,6 + b \quad | -1,6$$

$$\Leftrightarrow -0,6 = b \text{ bzw. } b = -0,6$$

Damit ist: $y = 0,8x - 0,6$ bzw. $y = \frac{4}{5}x - 0,6$

Ergebnis: Eine mögliche Funktionsgleichung der Geraden durch die Punkte B und D ist

$y = 0,8x - 0,6$ bzw. $y = \frac{4}{5}x - 0,6$.



Figur 2