



Teil A₁ und A₂ - Pflichtteil:

Pflichtteil A1	2
Pflichtteil A2	6

Teil B - Wahlteil:

Aufgabe W1a	13
Aufgabe W1b	16
Aufgabe W2a	18
Aufgabe W2b	20
Aufgabe W3a	22
Aufgabe W3b	23
Aufgabe W4a	26
Aufgabe W4b	28

Wichtige Hinweise zum Copyright:

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und nur für die eigene Nutzung zugelassen. Kopieren und Vervielfältigen der vorliegenden Datei ist verboten! Jede Nutzung in anderen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags.

Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung vervielfältigt oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Ausgenommen von diesen Regelungen ist die **Verwendung für folgende Unterrichtszwecke:**

So dürfen Lehrkräfte die vorliegende Datei zu Unterrichtszwecken ausdrucken, mit elektronischen Projektionsverfahren (wie Laptop und Beamer) einsetzen und OHP-Folien erstellen. Verboten ist allerdings die Weitergabe der Datei auf elektronischen Datenträgern.

Verstöße werden strafrechtlich verfolgt!

© Mathematik-Verlag 2023, Mosbach

Mathematik-Verlag Rainer Hild
Steige 44-2
74821 Mosbach
Internet: <https://matheverlag.com>
E-Mail: info@matheverlag.com



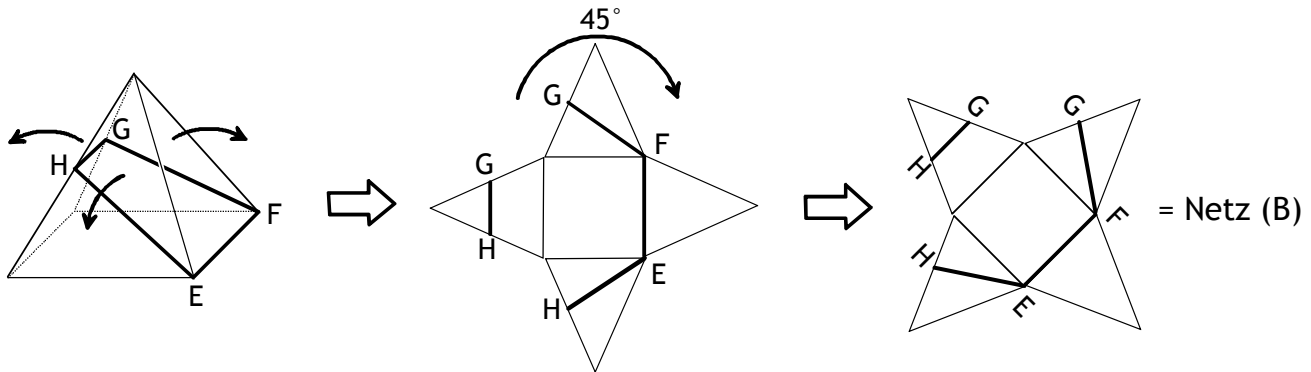
Lösungen zur Prüfung 2021: Pflichtteil A1

Aufgabe 1:

a) Zuordnung des richtigen Netzes:

Um das richtige Netz der Pyramide leichter zuordnen zu können, sollte man zunächst die Ecken des Streckenzugs in der quadratischen Pyramide mit E, F, G und H bezeichnen und anschließend die vier Seitenflächen „aufklappen“. So erhält man das Netz der Pyramide. Wenn man dieses Netz dann um 45° im Uhrzeigersinn dreht, erkennt man, dass es mit Netz (B) übereinstimmt:

(Hinweis: Eine Bezeichnung der Ecken mit A, B, C und D würde etwas irritieren, da die vier Netze mit eben diesen Buchstaben gekennzeichnet sind.)



Ergebnis: Der Streckenzug wird auf dem **Netz (B)** richtig dargestellt.

b) Das Volumen der quadratischen Pyramide:

Einsetzen von $a = 5 \text{ cm}$ und $h = 6 \text{ cm}$ in die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ ergibt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 6 = 25 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = 25 \cdot 2 = 50 \text{ cm}^3$$

Hinweis: Um den Wert von Hand leicht berechnen zu können, sollte man zuerst die Faktoren „25“ und „ $\frac{1}{3}$ “ vertauschen und dann den Wert von „ $\frac{1}{3} \cdot 6$ “ berechnen. Es ist: $\frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{6}{3} = 2$.

Ergebnis: Die quadratische Pyramide hat das Volumen **$V = 50 \text{ cm}^3$** .

Aufgabe 2:

Die Lösung der Gleichung:

Es ist:

$$(x - 3)(x + 5) + 7 = 8(x - 2) \quad | \text{ Ausmultiplizieren der Klammern}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 3x - 15 + 7 = 8x - 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 8x - 16 \quad | -8x + 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$$x_1 = -(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 8} = 3 + \sqrt{9 - 8} = 3 + \sqrt{1} = 4 \quad \text{und} \quad x_2 = 3 - \sqrt{1} = 2$$

Ergebnis: Die Lösungen der Gleichung sind **$x_1 = 4$** und **$x_2 = 2$** .

Lösungen zur Prüfung 2021: Pflichtteil A1



Aufgabe 3:

a) Ergänzen der beiden leeren Felder im Baumdiagramm:

- Für die Wahrscheinlichkeit P_1 des ersten Felds benötigt man die Regel, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, die von einem Knotenpunkt ausgehen, den Wert „1“ hat. Es muss also gelten: $\frac{1}{6} + 50\% + P_1 = 1$

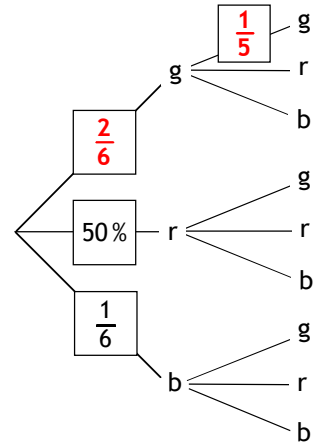
$$\text{Mit } 50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ folgt: } \frac{1}{6} + \frac{3}{6} + P_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{6} + P_1 = 1 \quad | -\frac{4}{6}$$

$$\Leftrightarrow P_1 = 1 - \frac{4}{6}$$

$$\Leftrightarrow P_1 = \frac{6}{6} - \frac{4}{6}$$

$$\Leftrightarrow P_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



- Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit P_2 des zweiten Felds muss man beachten, dass das gleichzeitige Ziehen von zwei Kugeln einem Ziehen *ohne* Zurücklegen der ersten Kugel entspricht und dass sich ursprünglich 2 gelbe Kugeln von insgesamt 6 Kugeln in dem Behälter befinden.

Dies folgt aus der Wahrscheinlichkeit $P_1 = \frac{2}{6}$.

Wenn man also mit dem ersten Zug eine gelbe Kugel zieht („g“), dann befinden sich beim zweiten Zug nur noch insgesamt 5 Kugeln in dem Behälter, von denen nur noch eine Kugel gelb ist.

Somit muss die Wahrscheinlichkeit des zweiten leeren Feldes $P_2 = \frac{1}{5}$ sein.

Ergebnis:

Die Wahrscheinlichkeiten der leeren Felder sind: $P_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (erstes Feld) und $P_2 = \frac{1}{5}$ (zweites Feld).

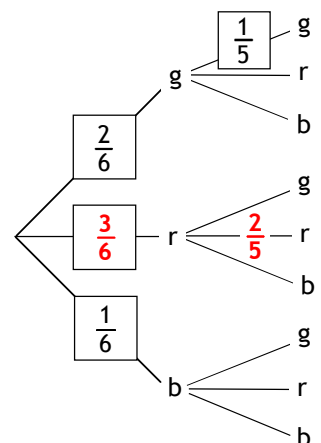
b) Die Wahrscheinlichkeit, dass Kim zwei rote Kugeln zieht:

Man beachte auch hier, dass das gleichzeitige Ziehen von zwei Kugeln einem Ziehen von zwei Kugeln *ohne* Zurücklegen der ersten Kugel entspricht. Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug eine rote Kugel zu ziehen, ist $50\% = \frac{3}{6}$. Daran erkennt man, dass sich ursprünglich 3 rote

Kugeln in dem Behälter befinden. Es ist also $P_1(\text{rot}) = \frac{3}{6}$.

Wenn Kim beim ersten Zug eine rote Kugel gezogen hat, sind beim zweiten Zug nur noch 5 Kugeln in dem Behälter, von denen nur noch 2 Kugeln rot sind. Es ist also $P_2(\text{rot}) = \frac{2}{5}$. Mit der Produktregel (= Pfadregel) folgt für

die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(r; r) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 20\%$



Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, dass Kim zwei rote Kugeln zieht, ist $P(r; r) = \frac{1}{5} = 20\%$.



Lösungen zur Prüfung 2021: Pflichtteil A1

Aufgabe 4:

a) Zuordnen der Graphen zu den richtigen Funktionsgleichungen:

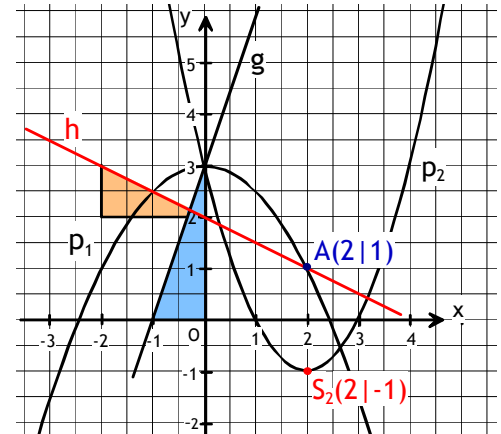
Um den Graphen die richtigen drei Funktionsgleichungen zuordnen zu können, muss man zunächst anhand des Schaubilds ihre Funktionsgleichungen bestimmen.

- Die **Gerade g** geht durch den Punkt $P(0|3)$. Somit ist in der Gleichung $y = mx + c$ der Wert $c = 3$. Zur Bestimmung der Steigung m muss man ein Steigungsdreieck einzeichnen (siehe Zeichnung rechts). Das markierte Steigungsdreieck ist 3 LE hoch

und 1 LE breit. Somit ist $m = \frac{3}{1} = 3$.

Die Funktionsgleichung von g ist also $y = 3x + 3$.

Das ist die **Funktionsgleichung (4)**.



- Die verschobene **Normalparabel p₂** hat den Scheitelpunkt $S_2(2|-1)$. Einsetzen der Koordinaten von $S_2(2|-1)$ in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ ergibt (mit $d = 2$ und $e = -1$):

$$y = (x - 2)^2 + (-1) = (x - 2)^2 - 1$$

Zum Vergleich mit den angegebenen Funktionsgleichungen muss man die Quadratklammer noch ausmultiplizieren und den resultierenden Term zusammenfassen:

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 4 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3$$

Das ist die **Funktionsgleichung (3)**.

- Die **Parabel p₁** hat die allgemeine Form $y = ax^2 + c^*$. Da der Scheitelpunkt von p_1 die Koordinaten $S_1(0|3)$ hat, ist $c^* = 3$. Den Wert von a erhält man, indem man die Koordinaten eines Punktes der Parabel p_1 in die Gleichung $y = ax^2 + 3$ einsetzt. Einen solchen Punkt kann man dem Schaubild der Parabel p_1 entnehmen. Mit dem Punkt $A(2|1)$ folgt:

$$1 = a \cdot 2^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow 1 = a \cdot 4 + 3$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4a + 3 \quad | -3$$

$$\Leftrightarrow -2 = 4a \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{4} = a \text{ bzw. } a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Somit lautet die Funktionsgleichung der Parabel p_1 : $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$. Das ist die **Gleichung (2)**.

Ergebnis:

Zur Geraden g gehört die Funktionsgleichung (4): $y = 3x + 3$

Zur Parabel p_2 gehört die Funktionsgleichung (3): $y = x^2 - 4x + 3$

Zur Parabel p_1 gehört die Funktionsgleichung (2): $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

b) Der Graph der Geraden h:

Die Gerade h : $y = -\frac{1}{2}x + 2$ hat den y-Achsenabschnitt $c = 2$ und die Steigung $m = -\frac{1}{2}$.

Indem man vom Punkt $P(0|2)$ aus ein Steigungsdreieck mit der Breite 2 LE und der Höhe 1 LE zeichnet, kann man den Graph von h erstellen (siehe Schaubild oben rechts). **Man beachte** beim Erstellen des Steigungsdreiecks, dass man die Breite 2 LE wegen der negativen Steigung nach *links* abtragen muss und die Höhe 1 LE nach oben.



Lösungen zur Prüfung 2021: Pflichtteil A1

Aufgabe 5:

Nachweis der Potenzgleichung:

Es gilt:

$$\frac{10^6}{5^4 \cdot 5^2} : 2^4 = 4 \quad | \quad \text{Anwenden von } 5^4 \cdot 5^2 = 5^{4+2} = 5^6$$

$$\Leftrightarrow \frac{10^6}{5^6} : 2^4 = 4 \quad | \quad \text{Anwenden von } \frac{10^6}{5^6} = \left(\frac{10}{5}\right)^6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{10}{5}\right)^6 : 2^4 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2^6 : 2^4 = 4 \quad | \quad \text{Anwenden von } 2^6 : 2^4 = 2^{6-4} = 2^2$$

$$\Leftrightarrow 2^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 4 = 4; \text{ was zu zeigen war.}$$

Aufgabe 6:

Anzahl der Kärtchen für das 10. Muster:

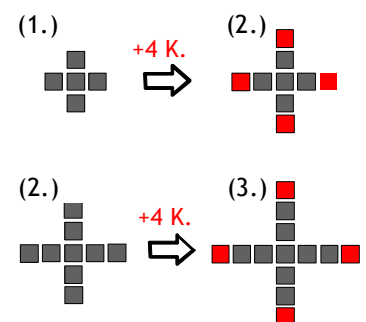
Man gelangt von einem Muster zum nächsten, indem man an die vier Enden des Kreuzes jeweils ein weiteres Kärtchen anlegt. Die Anzahl der Kärtchen nimmt also von einem Muster zum nächsten um 4 zu.

Auf diese Weise kann man *tabellarisch* ermitteln, aus wie vielen Kärtchen das 10. Muster besteht:

1. Muster: 5 Kärtchen; 2. Muster: 9 Kärtchen; 3. Muster: 13 Kärtchen
 4. Muster: 17 Kärtchen; 5. Muster: 21 Kärtchen; 6. Muster: 25 Kärtchen
 7. Muster: 29 Kärtchen; 8. Muster: 33 Kärtchen; 9. Muster: 37 Kärtchen
10. Muster: 41 Kärtchen

Rechnerisch kann man ausgehend von 5 Kärtchen im 1. Muster die Anzahl der Kärtchen im 10. Muster mit folgendem Term ermitteln: $5 + 9 \cdot 4 = 5 + 36 = 41$

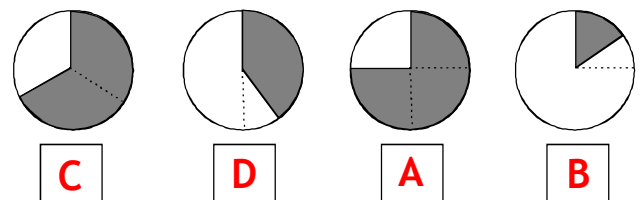
Ergebnis: Johannes hat nicht recht, weil das 10. Muster aus 41 Kärtchen besteht.



Aufgabe 7:

Zuordnen der Aussagen:

- Die **Aussage (A)** gehört zum dritten Kreis von links, weil der Kreis in 4 gleich große Sektoren aufgeteilt ist, von denen drei grau markiert sind.
- Die **Aussage (B)** gehört zum Kreis ganz rechts, weil dies der einzige Kreis ist, in dem ein markierter Sektor deutlich kleiner ist als ein Viertel (= 25 %).
- Die **Aussage (C)** gehört zu dem Kreis ganz links, weil 200 von 300 dem Bruch $\frac{200}{300} = \frac{2}{3}$ entspricht und in dem Kreis eine Fläche von $\frac{2}{3}$ markiert ist. (Hinweis: Wenn man im Kreis ganz links die graue Fläche halbiert, wird der ganze Kreis in 3 gleich große Sektoren unterteilt, von denen zwei grau markiert sind.)



- Die **Aussage (D)** gehört zum zweiten Kreis von links, weil 40 % etwas weniger als die Hälfte (= 50 %) sind.

Lösungen zur Prüfung 2021: Pflichtteil A2



Aufgabe 1:

Lösungsübersicht:

Zunächst sollte man den Winkel β mit 67° und die Strecke $\overline{BD}$ mit $10,0$ cm beschriften (siehe Figur 1). Ganz wichtig ist auch, dass man Folgendes beachtet:

Im gleichschenkligen Dreieck ABC gilt $\alpha = \beta = 67^\circ$ und $\overline{AD} = \overline{BD} = 10,0$ cm.

Weil das Viereck ADEF ein Quadrat ist, folgt mit $\overline{AD} = 10,0$ cm, dass auch $\overline{DE} = 10,0$ cm ist.

Die Strecke $\overline{DE}$ wird dann zur Berechnung der Strecke $\overline{CE}$ benötigt. Außerdem sollte man den Stufenwinkel $\gamma = \alpha = 67^\circ$ in die Zeichnung eintragen (siehe Figur 1 und 2).

Für den **Umfang u des Dreiecks GEC** gilt: $u = \overline{EG} + \overline{CE} + \overline{CG}$

Für die Strecke $\overline{CE}$ gilt: $\overline{CE} = \overline{CD} - \overline{DE}$, mit $\overline{DE} = 10,0$ cm (siehe oben).

Die Strecke $\overline{CD}$ kann im Dreieck DBC mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

Mit dem Winkel $\gamma = 67^\circ$ und der berechneten Strecke $\overline{CE}$ kann man dann im Dreieck GEC die Strecken $\overline{EG}$ und $\overline{CG}$ mit der Tangens- bzw. der Sinusfunktion berechnen (siehe Figur 3).

Der Umfang des Dreiecks GEC:

Für den Umfang u des Dreiecks GEC gilt: $u = \overline{EG} + \overline{CE} + \overline{CG}$

Kennt man die Strecke $\overline{CE}$ und den Winkel γ , kann man im Dreieck GEC mit der Tangensfunktion bzw. der Sinusfunktion die Strecken $\overline{EG}$ und $\overline{CG}$ berechnen (siehe Figur 3).

Mit den Angaben der Aufgabenstellung kann man sofort folgende Winkel und Strecken ermitteln:

Weil das Dreieck ABC gleichschenkelig ist, gilt (siehe Figur 1):

$$\alpha = \beta = 67,0^\circ \text{ und } \overline{AD} = \overline{BD} = 10,0 \text{ cm}$$

Da der Winkel γ ein Stufenwinkel zu $\alpha = 67,0^\circ$ ist, gilt $\gamma = 67,0^\circ$ (siehe Figur 1 und 2).

Und weil das Viereck ADEF ein Quadrat ist, folgt aus $\overline{AD} = 10,0$ cm: $\overline{DE} = 10,0$ cm (siehe Figur 2)

Damit kann nun die Strecke $\overline{CE}$ folgendermaßen berechnet werden:

→ Berechnung der Strecke $\overline{CE}$:

Für die Strecke $\overline{CE}$ gilt (siehe Figur 2): $\overline{CE} = \overline{CD} - \overline{DE}$

Mit $\overline{DE} = 10,0$ cm erhält man: $\overline{CE} = \overline{CD} - 10,0$ cm

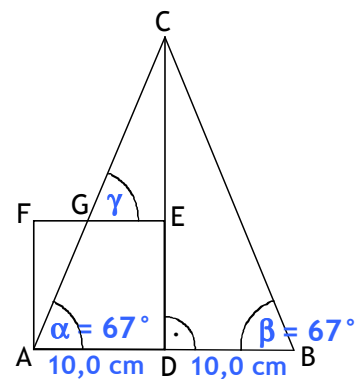
Die Strecke $\overline{CD}$ kann im Dreieck DBC mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Darin gilt:

$$\tan 67^\circ = \frac{\overline{CD}}{10,0} \quad | \cdot 10,0$$

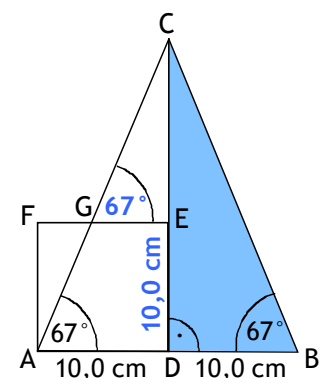
$$\Leftrightarrow 23,56 = \overline{CD} \text{ bzw. } \overline{CD} = 23,56 \text{ cm}$$

Damit folgt für $\overline{CE} = \overline{CD} - 10,0$ cm:

$$\overline{CE} = \underline{13,56 \text{ cm}}$$



Figur 1



Figur 2

Lösungen zur Prüfung 2021: Pflichtteil A2



→ Berechnung der Strecke EG:

Die Strecke EG kann nun im Dreieck GEC mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Darin gilt:

$$\tan 67^\circ = \frac{13,56}{EG} \quad | \cdot EG$$

$$\Leftrightarrow EG \cdot \tan 67^\circ = 13,56 \quad | : \tan 67^\circ$$

$$\Leftrightarrow EG = \underline{5,76 \text{ cm}}$$

→ Berechnung der Strecke CG:

Die Strecke CG kann im Dreieck GEC mit der Sinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 3). Darin gilt:

$$\sin 67^\circ = \frac{13,56}{CG} \quad | \cdot CG$$

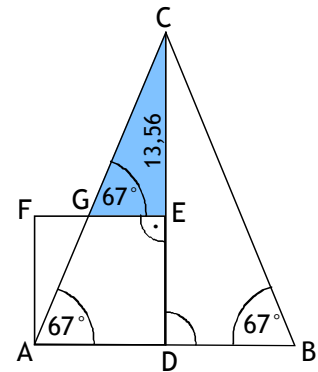
$$\Leftrightarrow CG \cdot \sin 67^\circ = 13,56 \quad | : \sin 67^\circ$$

$$\Leftrightarrow CG = \underline{14,73 \text{ cm}}$$

Einsetzen von $\overline{EG} = 5,76 \text{ cm}$, $\overline{CE} = 13,56 \text{ cm}$ und $\overline{CG} = 14,73 \text{ cm}$ in $u = \overline{EG} + \overline{CE} + \overline{CG}$ ergibt:

$$u = 5,76 \text{ cm} + 13,56 \text{ cm} + 14,73 \text{ cm} = \underline{34,05 \text{ cm}}$$

Ergebnis: Der Umfang des Dreiecks GEC beträgt $u = 34,05 \text{ cm}$.



Figur 3

Aufgabe 2:

Lösungsübersicht:

Die **Oberfläche** O_{zus} des zusammengesetzten Körpers setzt sich aus einem Kegelmantel M_{Ke} , einem Kreisring K_R und einer halben Kugeloberfläche O_{HK} zusammen. Es gilt: $O_{\text{zus}} = M_{\text{Ke}} + K_R + O_{\text{HK}}$

Zur Berechnung dieser drei Flächeninhalte benötigt man außer der angegebenen Strecke $s = 3,7 \text{ m}$ noch den Grundkreisradius r_{Ke} des Kegels und den Radius r_{HK} der Halbkugel.

- Der Radius r_{Ke} kann mit $\alpha = 72,0^\circ$ und $s = 3,7 \text{ m}$ mit der Kosinusfunktion in dem markierten Dreieck der Figur 1 berechnet werden.

- Für den Radius r_{HK} der Halbkugel gilt (siehe Figur 2): $r_{\text{HK}} = h_{\text{ges}} - h_{\text{Ke}}$; mit $h_{\text{ges}} = 5,1 \text{ m}$

Die Kegelhöhe h_{Ke} kann mit der Sinusfunktion in dem markierten Dreieck der Figur 2 berechnet werden.

Die **Anzahl der Dosen** zum Anstrich der Oberfläche erhält man mit einer Zweisatzrechnung.

Berechnung des Oberflächeninhalts O_{zus} des zusammengesetzten Körpers:

Für den Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers gilt: $O_{\text{zus}} = M_{\text{Ke}} + K_R + O_{\text{HK}}$, mit dem Kegelmantel M_{Ke} , dem Kreisring K_R und der halben Kugeloberfläche O_{HK} .

Die benötigten Formeln sind (siehe Formelsammlung):

$$M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r_{\text{Ke}} \cdot s \quad \text{bzw. mit } s = 3,7 \text{ m:}$$

$$M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r_{\text{Ke}} \cdot 3,7$$

$$K_R = \pi \cdot (r_{\text{HK}}^2 - r_{\text{Ke}}^2) \quad \text{und} \quad O_{\text{HK}} = 2\pi \cdot r_{\text{HK}}^2$$

$$\text{Damit ist } O_{\text{zus}} = \pi \cdot r_{\text{Ke}} \cdot 3,7 + \pi \cdot (r_{\text{HK}}^2 - r_{\text{Ke}}^2) + 2\pi \cdot r_{\text{HK}}^2$$

Man benötigt also noch den Kegelradius r_{Ke} und den Radius r_{HK} der Halbkugel.

Lösungen zur Prüfung 2021: Pflichtteil A2



→ Berechnung des Radius' r_{Ke} des Kegelgrundkreises:

Der Radius des Kegelgrundkreises kann im markierten Dreieck der Figur 1 mit der Kosinusfunktion berechnet werden. Darin gilt:

$$\cos 72^\circ = \frac{r_{Ke}}{3,7} \quad | \cdot 3,7$$

$$\Leftrightarrow 1,14 = r_{Ke} \text{ bzw. } \underline{r_{Ke} = 1,14 \text{ m}}$$

→ Berechnung des Radius' r_{HK} der Halbkugel:

Für den Radius r_{HK} der Halbkugel gilt (siehe Figur 2): $r_{HK} = 5,1 - h_{Ke}$

Die Kegelhöhe h_{Ke} kann im markierten Dreieck der Figur 2 mit der Sinusfunktion berechnet werden. Es gilt:

$$\sin 72^\circ = \frac{h_{Ke}}{3,7} \quad | \cdot 3,7$$

$$\Leftrightarrow 3,52 = h_{Ke} \text{ bzw. } h_{Ke} = 3,52 \text{ m}$$

Einsetzen in $r_{HK} = 5,1 - h_{Ke}$ ergibt: $r_{HK} = 1,58 \text{ m}$

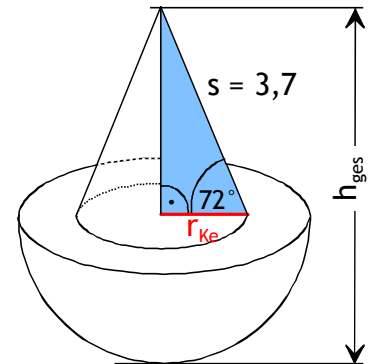
Einsetzen von $r_{Ke} = 1,14 \text{ m}$ und $r_{HK} = 1,58 \text{ m}$

in $O_{Zus} = \pi \cdot r_{Ke} \cdot 3,7 + \pi \cdot (r_{HK}^2 - r_{Ke}^2) + 2\pi \cdot r_{HK}^2$ ergibt:

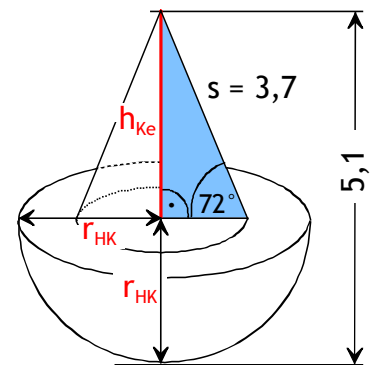
$$O_{Zus} = \pi \cdot 1,14 \cdot 3,7 + \pi \cdot (1,58^2 - 1,14^2) + 2\pi \cdot 1,58^2$$

$$\Leftrightarrow O_{Zus} = 13,25 + 3,76 + 15,69$$

$$\Leftrightarrow \underline{O_{Zus} = 32,7 \text{ m}^2}$$



Figur 1



Figur 2

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers beträgt $O_{Zus} = 32,7 \text{ m}^2$.

Die Anzahl des Dosen für den Farbanstrich:

Da eine Dose für 10 m^2 reicht, reichen 3 Dosen für 30 m^2 . Für eine Fläche von $32,7 \text{ m}^2$ braucht man also noch eine weitere Dose.

Ergebnis: Für den Farbanstrich des zusammengesetzten Körpers sind 4 Dosen nötig.

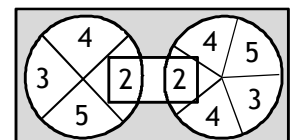
Aufgabe 3:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern angezeigt wird:

Das Ereignis „zwei gleiche Ziffern“ setzt sich aus den Ergebnissen

(2; 2), (3; 3), (4; 4) und (5; 5) zusammen.

In dieser Schreibweise steht die linke Ziffer jeweils für die angezeigte Ziffer des linken Glücksrads und die rechte Ziffer für die angezeigte Ziffer des rechten Glücksrads.



Mit der Produktregel erhält man:

$$P(2; 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20} ; P(3; 3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20} ; P(4; 4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{20} ; P(5; 5) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

Mit der Summenregel erhält man:

$$P(\text{zwei gleiche Ziffern}) = P(2; 2) + P(3; 3) + P(4; 4) + P(5; 5) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = 25 \%$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern angezeigt wird, beträgt

$$P(\text{zwei gleiche Ziffern}) = \frac{5}{20} = \underline{25 \%}.$$

Lösungen zur Prüfung 2021: Pflichtteil A2

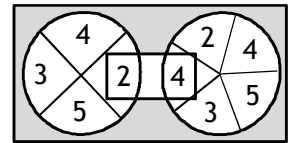


Die Wahrscheinlichkeit, dass eine durch 12 teilbare Zahl angezeigt wird:

Die einzige durch 12 teilbare Zahl, die von dem Glücksrad angezeigt werden kann, ist **24**. Das erkennt man sehr leicht, wenn man die 12er-Reihe aufschreibt: 12; **24**; 36; 48; 60; 72; . . .

Mit der Produktregel erhält man:

$$P(2; 4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 10 \%$$



Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine durch 12 teilbare Zahl angezeigt wird, beträgt

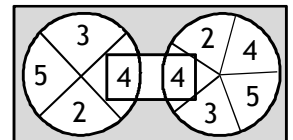
$$P(2; 4) = \frac{2}{20} = \underline{10 \%}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens einmal die Ziffer 4 zu sehen ist:

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die Ziffer 4 höchstens einmal zu sehen ist, sollte man über die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses „die Ziffer 4 ist zweimal zu sehen“ berechnen. Es gilt:

$$P(\text{höchstens einmal } 4) = 1 - P(\text{zweimal die } 4)$$

$$\text{Mit der Produktregel erhält man: } P(4; 4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 10 \%$$



$$\text{Damit folgt: } P(\text{höchstens einmal } 4) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 90 \%$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens einmal die Ziffer 4 angezeigt wird, beträgt

$$P(\text{höchstens einmal } 4) = \frac{9}{10} = \underline{90 \%}.$$

Aufgabe 4:

Prozentualer Anstieg des Umsatzes des Onlinehandels von 2016 bis 2019:

Im Jahr 2016 betrug der Umsatz des Onlinehandels **44,2 Mrd. €**. Das ist der Grundwert G .

Im Jahr 2019 betrug der Umsatz des Onlinehandels **58,5 Mrd. €**. Das ist der erhöhte Grundwert G_+ .

Einsetzen von $G = 44,2 \text{ Mrd. €}$ und $G_+ = 58,5 \text{ Mrd. €}$ in die Formel $G_+ = G \cdot q_+$ ergibt:

$$58,5 = 44,2 \cdot q_+ \quad | : 44,2$$

$$\Leftrightarrow 1,324 = q_+ \text{ bzw. } q_+ = 1,324$$

$$\text{Mit } q_+ = 1 + \frac{p}{100} \text{ folgt: } p \% = 32,4 \%$$

Ergebnis: Der Umsatz des Onlinehandels ist zwischen 2016 und 2019 um 32,4 % angestiegen.

Der Umsatz für den Bereich „Freizeit und Hobby“ im Jahr 2017:

Im Jahr 2017 wurden laut Säulendiagramm insgesamt 48,9 Mrd. € im Onlinehandel umgesetzt. Davon entfielen laut Kreisdiagramm 14,5 % auf den Bereich „Freizeit und Hobby“. Der gesuchte Umsatz für den Bereich „Freizeit und Hobby“ ist also der Prozentwert W .

$$\text{Einsetzen von } G = 48,9 \text{ Mrd. € und } p = 14,5 \text{ in die Formel } W = G \cdot \frac{p}{100} \text{ ergibt:}$$

$$W = 48,9 \cdot \frac{14,5}{100} = 7,09 \text{ Mrd. €}$$

Ergebnis: Im Jahr 2017 betrug der Umsatz für den Bereich „Freizeit und Hobby“ 7,09 Mrd. €.



Lösungen zur Prüfung 2021: Pflichtteil A2

Die Ausgaben im Onlinehandel für Smartphones im Jahr 2017:

Zunächst muss man den Umsatz des Bereichs „Elektronik“ in Euro berechnen.

Das ist der Prozentwert $W_{\text{Elektronik}}$.

Mit $p\% = 24,9\%$ (siehe Kreisdiagramm) und dem Grundwert $G = 48,9$ Mrd. € (siehe Säulendiagramm)

$$\text{erhält man: } W_{\text{Elektronik}} = 48,9 \cdot \frac{24,9}{100} = 12,176 \text{ Mrd. €}$$

Laut Aufgabenstellung entfielen 53,0 % von diesem Wert auf den Onlinehandel mit Smartphones.

Für diese Rechnung muss man $W_{\text{Elektronik}} = 12,176$ Mrd. € nun als neuen Grundwert G betrachten.

Mit dem Prozentsatz $p\% = 53,0\%$ erhält man:

$$W_{\text{Smartphones}} = 12,176 \cdot \frac{53,0}{100} = 6,45 \text{ Mrd. €}$$

Ergebnis: Im Jahr 2017 wurden im Onlinehandel für Smartphones **6,45 Mrd. €** ausgegeben.

Aufgabe 5:

Die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts Q zwischen p und g:

Um den zweiten Schnittpunkt zwischen der Parabel $p: y = x^2 - 6x + 10$ und der Geraden g berechnen zu können, benötigt man noch die Gleichung der Geraden g . Der erste Schnittpunkt zwischen g und p ist laut Aufgabenstellung der Scheitelpunkt S der Parabel p . Mit der Steigung $m = -2$ lautet die unvollständige Gleichung von $g: y = -2x + c$.

Den y -Achsenabschnitt c kann man berechnen, indem man die Koordinaten eines Punktes von g in $y = -2x + c$ einsetzt. Ein solcher Punkt ist der Scheitelpunkt S der Parabel p , durch den die Gerade g gehen soll.

→ Berechnung der Koordinaten von S:

Die Koordinaten von S bestimmt man, indem die Gleichung von $p: y = x^2 - 6x + 10$ mit einer quadratischen Ergänzung in eine Scheitelform umwandelt:

$$y = x^2 - 6x + 10$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 6x + 3^2 + 10 - 3^2 \quad | \text{Anwenden der zweiten binomischen Formel}$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 3)^2 + 10 - 9$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 3)^2 + 1$$

Dieser Scheitelform entnimmt man: **S(3 | 1)**

Einsetzen von **S(3 | 1)** in die unvollständige Geradengleichung $g: y = -2x + c$ ergibt:

$$1 = -2 \cdot 3 + c$$

$$\Leftrightarrow 1 = -6 + c \quad | +6$$

$$\Leftrightarrow 7 = c \text{ bzw. } c = 7$$

Damit ist **g: $y = -2x + 7$**

Gleichsetzen von $p: y = x^2 - 6x + 10$ und $g: y = -2x + 7$ ergibt:

$$x^2 - 6x + 10 = -2x + 7 \quad | +2x - 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$



Lösungen zur Prüfung 2021: Pflichtteil A2

Mit der b,c-Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$$x_1 = -(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 3} = 2 + \sqrt{1} = 3 + \sqrt{1} = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = 2 - \sqrt{1} = 1$$

Das sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte zwischen p und g. Die zugehörigen y-Koordinaten erhält, indem man $x_1 = 3$ bzw. $x_2 = 1$ in eine der beiden Gleichungen p: $y = x^2 - 6x + 10$ oder g: $y = -2x + 7$ einsetzt.

Einsetzen von $x_1 = 3$ in $y = -2x + 7$ ergibt: $y = -6 + 7 = 1 \Rightarrow A(3|1)$, das ist der Scheitelpunkt S(3|1).

Einsetzen von $x_2 = 1$ in $y = -2x + 7$ ergibt: $y = -2 + 7 = 5 \Rightarrow Q(1|5)$, das ist der zweite Schnittpunkt.

Ergebnis: Der zweite Schnittpunkt zwischen g und p hat die Koordinaten Q(1|5).

Die Funktionsgleichung der Geraden h:

Da die Gerade h laut Aufgabenstellung senkrecht zur Geraden g: $y = -2x + 7$ verlaufen soll, muss für ihre Steigung m_h gelten: $m_h \cdot m_g = -1$

Mit $m_g = -2$ erhält man:

$$m_h \cdot (-2) = -1 \quad | : (-2)$$

$$\Leftrightarrow m_h = \frac{1}{2}$$

Damit lautet die unvollständige Funktionsgleichung von h: $y = \frac{1}{2}x + c^*$.

Einsetzen von Q(1|5) in $y = \frac{1}{2}x + c^*$ ergibt:

$$5 = \frac{1}{2} \cdot 1 + c^*$$

$$\Leftrightarrow 5 = \frac{1}{2} + c^* \quad | -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4,5 = c^* \quad \text{bzw.} \quad c^* = 4,5$$

Damit ist h: $y = \frac{1}{2}x + 4,5$

Ergebnis: Die Gerade h hat die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x + 4,5$.

Aufgabe 6:

Welcher Boxplot gehört zu Diagramm (1) ?

Um das Diagramm (1) dem richtigen Boxplot zuordnen zu können, muss man die Kennwerte von Diagramm (1) bestimmen und mit den Kennwerten der beiden Boxplots vergleichen. Dazu benötigt man eine geordnete Urliste (Rangliste) der Lesezeiten von Diagramm (1).

(Hinweis: Die Kennwerte von Diagramm (2) können nicht bestimmt werden, weil es unvollständig ist.)

Rangliste der Lesezeiten von Diagramm (1):

1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 10 | 10 | 12 | 14 | 16

Hinweis: Die Höhe eines Balkens im Diagramm (1) gibt an, wie oft man die zugehörige Lesezeit in der Rangliste aufschreiben muss.

Da sich beide Boxplots nur im oberen Quartil unterscheiden, muss man das obere Quartil dieser Rangliste bestimmen.

Lösungen zur Prüfung 2021: Pflichtteil A2



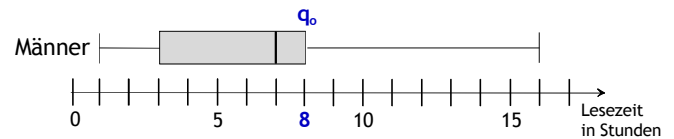
Das obere Quartil q_0 befindet sich wegen $\frac{3}{4} \cdot 25 = 18,75$ am 19. Platz der Rangliste.

1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 10 | 10 | 12 | 14 | 16

Dort steht der Wert $q_0 = 8 \text{ h}$. Das ist das gleiche obere Quartil wie im Boxplot der Männer.

Ergebnis:

Somit gehört zum Diagramm (1) der Boxplot der Männer.



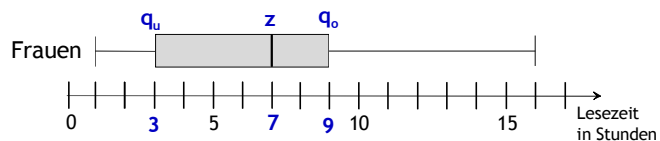
Mögliche Säulen im Diagramm (2):

Um mögliche Säulen für die Lesezeiten 8 bis 16 Stunden im Diagramm (2) ergänzen zu können, muss man zunächst am Boxplot der Frauen die charakteristischen Kennwerte ablesen.

Man erhält:

$x_{\min} = 1 \text{ h}$ und $x_{\max} = 16 \text{ h}$;

$z = 7 \text{ h}$; $q_u = 3 \text{ h}$ und $q_o = 9 \text{ h}$.



Anschließend muss man eine mögliche Rangliste aufstellen, die die gleichen Kennwerte hat wie der Boxplot der Frauen. Dabei muss man beachten:

- Der Zentralwert $z = 7 \text{ h}$ muss sich wegen $\frac{25}{2} = 12,5$ am **13. Platz** der Rangliste befinden.
- Das untere Quartil $q_u = 3 \text{ h}$ muss sich wegen $\frac{1}{4} \cdot 25 = 6,25$ am **7. Platz** der Rangliste befinden.
- Das obere Quartil $q_o = 9 \text{ h}$ muss sich wegen $\frac{3}{4} \cdot 25 = 18,75$ am **19. Platz** der Rangliste befinden.
- Der maximale Extremwert ist $x_{\max} = 16 \text{ h}$.

Unvollständige Rangliste der Lesezeiten von Diagramm (2):

[illegible]

Der minimale Extremwert $x_{\min} = 1 \text{ h}$, der Zentralwert $z = 7 \text{ h}$ und das untere Quartil $q_u = 3 \text{ h}$ stimmen bereits mit dem unvollständigen Diagramm (2) überein.

Wenn man die Werte für $q_0 = 9$ und $x_{\max} = 16$ an den Plätzen 19 bzw. 25 einträgt, erhält man:

1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | | | | 9 | | | | | | 16

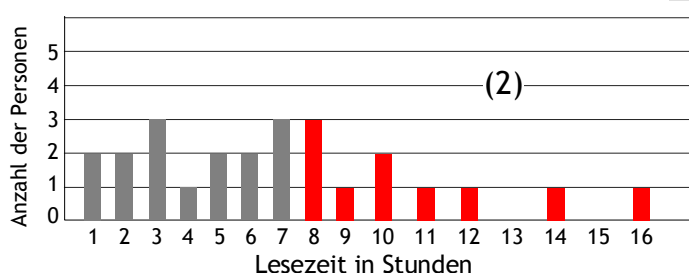
Plätze 16 bis 18 Plätze 20 bis 24

Für die Plätze 16 bis 18 kann man die Lesezeiten 8 h und 9 h wählen. Also beispielsweise dreimal die „8“ oder zweimal die „8“ und einmal die „9“ oder dreimal die „9“.

Für die Plätze 20 bis 24 kann man die Lesezeiten 9 ; 10; 11; 12; 13; 14; 15 und 16 wählen (in h).

Wie oft man eine Lesezeit wählt, ist frei entscheidbar. Allerdings müssen die Werte der Rangliste der Größe nach aufsteigen. Eine mögliche Rangliste und das zugehörige Diagramm (2) ist:

1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 14 | 16





Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W1

Finns Behauptung:

Finns Behauptung, wonach über die Hälfte der Männer pro Woche 7 Stunden und mehr liest, kann man leicht anhand der Rangliste der Männer überprüfen:

1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 10 | 10 | 12 | 14 | 16

↑
Platz 12 von insgesamt 25 Plätzen

Der Wert 6 h steht am 12. Platz der Rangliste. Auf den weiteren Plätzen 13 bis 25 stehen dann nur noch Werte, die 7 h oder größer sind. Das sind 13 Werte (wegen $25 - 12 = 13$).

Ergebnis: Wegen $\frac{13}{25} = 0,52 > \frac{1}{2}$ hat Finn recht.

Aufgabe W1a:

Lösungsübersicht:

Variante 1 zur Berechnung der Strecke $\overline{DF}$:

- Für die Strecke $\overline{DF}$ gilt: $\overline{DF} = \overline{DE} - \overline{EF}$

→ Die Strecke $\overline{EF}$ kann man besonders einfach ermitteln, wenn man ausgehend von $\alpha = 55^\circ$ folgende Winkel in die Figur einträgt:

Weil das Dreieck ADE gleichschenkelig sein soll mit der Grundseite $\overline{AD}$, ist auch der zweite Basiswinkel $\delta = 55^\circ$ (siehe Figur 1). Im Dreieck FBD erhält man dann aus der Summe der Innenwinkel den Winkel $\sphericalangle BFD = 35^\circ$. Somit ist auch der Wechselwinkel $\sphericalangle CFE = 35^\circ$ (siehe Figur 1). Für den Winkel γ erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC: $\gamma = 35^\circ$. Wegen $\gamma = \sphericalangle CFE = 35^\circ$ ist dann auch das Dreieck EFC gleichschenkelig mit der Grundseite $\overline{FC}$ (siehe Figur 1). Somit folgt aus $\overline{CE} = 8,0 \text{ cm}$ sofort: $\overline{EF} = 8,0 \text{ cm}$.

→ Für die Strecke $\overline{DE}$ gilt laut Aufgabenstellung: $\overline{DE} = \overline{AE}$. Für die Strecke $\overline{AE}$ gilt: $\overline{AE} = \overline{AC} - 8,0 \text{ cm}$ (siehe Figur 2). Die Strecke $\overline{AC}$ kann man im Dreieck ABC mit der Kosinusfunktion berechnen (s. Figur 2).

- Für den Umfang u des Vierecks ABFE gilt: $u = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{EF} + \overline{AE}$. Die Strecke $\overline{AB}$ ist bereits angegeben mit $= 13,2 \text{ cm}$. Die Strecken $\overline{EF}$ und $\overline{AE}$ wurden bereits im ersten Aufgabenteil berechnet. Die Strecke $\overline{BF}$ kann mit der Sinusfunktion im Dreieck BDF berechnet werden (siehe Figur 3).

Variante 2 zur Berechnung der Strecke $\overline{DF}$: (etwas komplizierter)

- Die Strecke $\overline{DF}$ kann auch im Dreieck BDF mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{BD}$ kennt (siehe Figur 4). Für $\overline{BD}$ gilt: $\overline{BD} = \overline{DM} - \overline{BM}$.

→ Weil das Dreieck ADE gleichschenkelig ist, gilt $\overline{DM} = \overline{AM}$ (siehe Figur 5). Die Strecke $\overline{AM}$ kann im Dreieck AME mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{AE}$ kennt (siehe Figur 5). Für die Strecke $\overline{AE}$ gilt $\overline{AE} = \overline{AC} - 8,0 \text{ cm}$ (siehe Figur 2). Die Strecke $\overline{AC}$ kann im Dreieck ABC mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).

→ Für die Strecke $\overline{BM}$ gilt (siehe Figur 5): $\overline{BM} = 13,2 \text{ cm} - \overline{AM}$

Tipp: Wenn Sie überhaupt keinen Lösungsansatz erkennen, sollten Sie zunächst im Dreieck ABC die Strecke $\overline{AC}$ berechnen. Dann erhalten Sie mit $\overline{EC} = 8,0 \text{ cm}$ sofort die Strecke $\overline{AE}$. Außerdem sollten Sie die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks ADE zur Grundseite $\overline{AD}$ einzeichnen, sodass Sie im Dreieck AME die Strecke $\overline{AM}$ und aus $\overline{AB} = 13,2 \text{ cm}$ die Strecke $\overline{BM}$ berechnen können.

Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W1



Berechnung der Länge von $\overline{DF}$:

Für die Strecke $\overline{DF}$ gilt (siehe Figur 1): $\overline{DF} = \overline{DE} - \overline{EF}$

→ Berechnung der Strecke $\overline{EF}$:

Die Strecke $\overline{EF}$ kann man besonders einfach ermitteln, wenn man ausgehend von $\alpha = 55^\circ$ folgende Winkel in die Figur einträgt (siehe Figur 1):

Weil das Dreieck ADE gleichschenkelig sein soll mit der Grundseite $\overline{AD}$, ist auch der zweite Basiswinkel $\delta = 55^\circ$.

Im Dreieck FBD erhält man dann aus der Summe der Innenwinkel den Winkel $\sphericalangle BFD$ (= Winkel bei F). Es gilt:

$$\sphericalangle BFD + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \sphericalangle BFD = 35^\circ$$

Somit ist auch der Wechselwinkel $\sphericalangle CFE = 35^\circ$ (= zweiter Winkel bei F).

Für den Winkel γ erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC. Darin gilt (siehe Figur 1):

$$\gamma + 35^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \gamma = 35^\circ$$

Wegen $\gamma = \sphericalangle CFE = 35^\circ$ muss dann auch das Dreieck EFC gleichschenkelig sein mit der Grundseite $\overline{FC}$.

Aus $\overline{CE} = \overline{EF}$ und $\overline{CE} = 8,0 \text{ cm}$ folgt: $\overline{EF} = \underline{8,0 \text{ cm}}$

→ Berechnung der Strecke $\overline{DE}$:

Für die Strecke $\overline{DE}$ gilt laut Aufgabenstellung: $\overline{DE} = \overline{AE}$

Für die Strecke $\overline{AE}$ gilt: $\overline{AE} = \overline{AC} - 8,0 \text{ cm}$ (siehe Figur 2).

Die Strecke $\overline{AC}$ kann im Dreieck ABC mit der Kosinusfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Darin gilt:

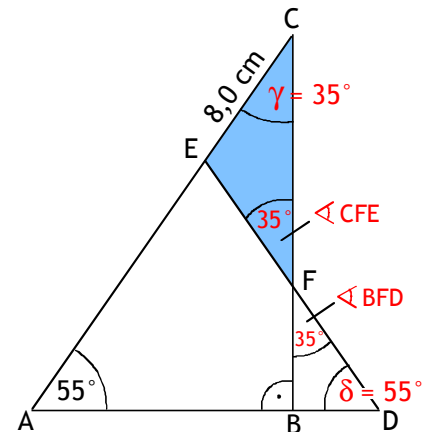
$$\cos 55^\circ = \frac{13,2}{\overline{AC}} \quad | \cdot \overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} \cdot \cos 55^\circ = 13,2 \quad | : \cos 55^\circ$$

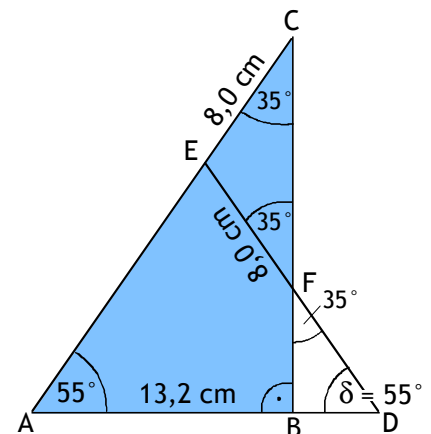
$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 23,01 \text{ cm}$$

Einsetzen in $\overline{AE} = \overline{AC} - 8,0 \text{ cm}$ ergibt: $\overline{AE} = 15,01 \text{ cm}$

Wegen $\overline{DE} = \overline{AE}$ folgt: $\overline{DE} = \underline{15,01 \text{ cm}}$



Figur 1



Figur 2

Einsetzen von $\overline{EF} = 8,0 \text{ cm}$ und $\overline{DE} = 15,01 \text{ cm}$ in $\overline{DF} = \overline{DE} - \overline{EF}$ ergibt schließlich:

$$\overline{DF} = 15,01 \text{ cm} - 8,0 \text{ cm} = \underline{7,01 \text{ cm}}$$

Ergebnis: Die Länge der Strecke $\overline{DF}$ ist $\overline{DF} = \underline{7,01 \text{ cm}}$.

Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W1



Berechnung des Umfangs des Vierecks ABFE:

Für den Umfang u des Vierecks ABFE gilt: $u = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{EF} + \overline{AE}$

Mit $\overline{AB} = 13,2 \text{ cm}$ (siehe Aufgabestellung), $\overline{EF} = 8,0 \text{ cm}$ (siehe oben) und $\overline{AE} = 15,01 \text{ cm}$ (siehe oben) erhält man: $u = 13,2 \text{ cm} + \overline{BF} + 8,0 \text{ cm} + 15,01 \text{ cm} = 36,21 \text{ cm} + \overline{BF}$

→ Berechnung der Strecke $\overline{BF}$:

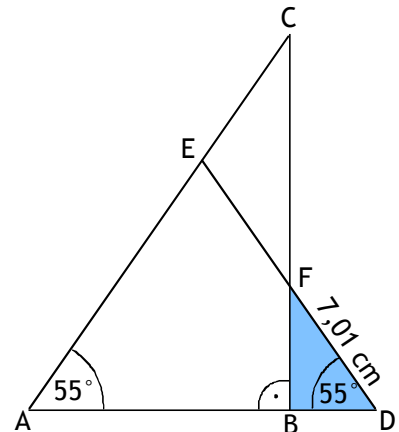
Die Strecke $\overline{BF}$ kann im Dreieck BDF mit der Sinusfunktion berechnet werden, da die Strecke $\overline{DF} = 7,01 \text{ cm}$ und der Winkel $\delta = 55^\circ$ bekannt sind (siehe oben). Es gilt:

$$\sin 55^\circ = \frac{\overline{BF}}{7,01} \quad | \cdot 7,01$$

$$\Leftrightarrow 5,74 = \overline{BF} \quad \text{bzw.} \quad \overline{BF} = \underline{5,74 \text{ cm}}$$

Einsetzen von $\overline{BF} = 5,74 \text{ cm}$ in $u = 36,21 \text{ cm} + \overline{BF}$ ergibt: $u = \underline{41,95 \text{ cm}}$

Ergebnis: Der Umfang des Vierecks ABFE ist $\underline{u = 41,95 \text{ cm}}$.



Figur 3

Variante 2 zur Berechnung der Länge von $\overline{DF}$:

Die Strecke $\overline{DF}$ kann auch im Dreieck BDF mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{BD}$ kennt (siehe Figur 4).

Es gilt: $\cos 55^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$

→ Berechnung der Strecke $\overline{BD}$:

Für $\overline{BD}$ gilt (siehe Figur 5): $\overline{BD} = \overline{DM} - \overline{BM}$

Weil das Dreieck ADE gleichschenkelig ist, gilt $\overline{DM} = \overline{AM}$.

Die Strecke $\overline{AM}$ kann im Dreieck AME mit der Kosinusfunktion berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{AE}$ kennt (s. Figur 5).

Für $\overline{AE}$ erhält man (siehe oben Figur 2): $\overline{AE} = 15,01 \text{ cm}$

Im Dreieck AME gilt also: $\cos 55^\circ = \frac{\overline{AM}}{15,01} \quad | \cdot 15,01$

$$\Leftrightarrow 8,61 = \overline{AM} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AM} = 8,61 \text{ cm}$$

Damit ist auch $\overline{DM} = \underline{8,61 \text{ cm}}$.

Für die Strecke $\overline{BM}$ gilt: $\overline{BM} = 13,2 \text{ cm} - \overline{AM}$

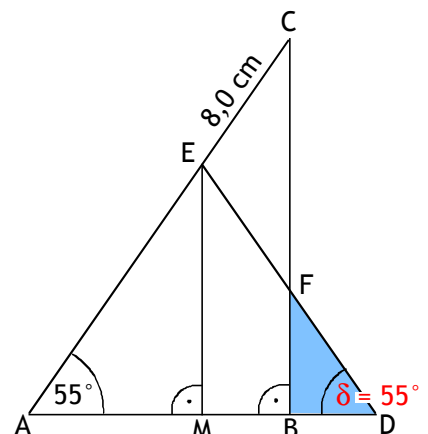
Mit $\overline{AM} = 8,61 \text{ cm}$ folgt: $\overline{BM} = \underline{4,59 \text{ cm}}$

Einsetzen von $\overline{DM} = 8,61 \text{ cm}$ und $\overline{BM} = 4,59 \text{ cm}$ in

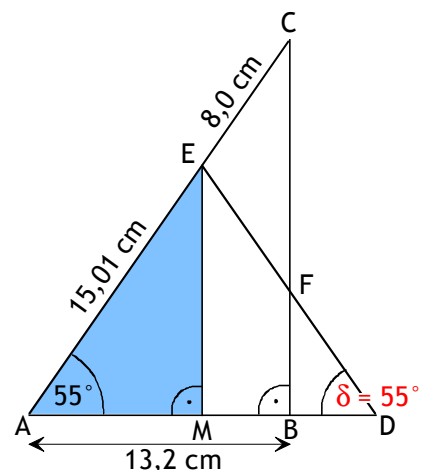
$\overline{BD} = \overline{DM} - \overline{BM}$ ergibt: $\overline{BD} = \underline{4,02 \text{ cm}}$

Einsetzen von $\overline{BD} = 4,02 \text{ cm}$ in $\cos 55^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$ ergibt:

$$\cos 55^\circ = \frac{4,02}{\overline{DF}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{DF} = \underline{7,01 \text{ cm}} \quad (\text{siehe oben})$$



Figur 4



Figur 5

Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W1



Aufgabe W1b:

Lösungsübersicht:

- Die Funktionsgleichung der Parabel p erhält man, indem man die Koordinaten der Punkte $A(1|-8)$ und $B(3|-8)$ jeweils in die Normalform $y = x^2 + bx + c$ einsetzt. Man erhält so ein Gleichungssystem, das man nach den Variablen b und c auflösen kann.
- Um den **Flächeninhalt des beschriebenen Vierecks** zu berechnen, muss man zunächst die Schnittpunkte der Parabel p mit der x -Achse bestimmen. Dazu muss man in der Funktionsgleichung von p für $y = 0$ setzen und die resultierende Gleichung nach x auflösen. Wenn man die Schnittpunkte von p mit der x -Achse und die Punkte A und B in ein Koordinatensystem einträgt, erkennt man, dass es sich bei dem Viereck um ein Trapez handelt (siehe Figur 1). Dessen Flächeninhalt kann dann mit der entsprechenden Formel berechnet werden (siehe Formelsammlung).
- Um die **Koordinaten des Schnittpunkts Q** berechnen zu können, muss man zuerst die Gleichungen der Geraden g und h aufstellen. Dazu muss man jeweils die Koordinaten zweier Geradenpunkte in die allgemeine Gleichung $y = mx + c$ einsetzen. Man erhält so jeweils ein Gleichungssystem, das nach den Variablen m und c gelöst werden kann. Die benötigten Geradenpunkte sind die Ecken des Vierecks $ABCD$ (siehe Figur 2). Durch anschließendes Gleichsetzen beider Geradengleichungen können die Koordinaten des Schnittpunkts Q berechnet werden.

Berechnung des Funktionsgleichung der Parabel p :

Einsetzen der Koordinaten von $A(1|-8)$ und $B(3|-8)$ in die Normalform $y = x^2 + bx + c$ ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$\text{Mit } A(1|-8): -8 = 1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow -8 = 1 + 1b + c \quad (I)$$

$$\text{Mit } B(3|-8): -8 = 3^2 + b \cdot 3 + c \Leftrightarrow -8 = 9 + 3b + c \quad (II)$$

$$(I) - (II) \text{ ergibt: } 0 = -8 - 2b \quad | +2b$$

$$\Leftrightarrow 2b = -8 \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow b = -4$$

Einsetzen von $b = -4$ in Gleichung (I) $-8 = 1 + 1b + c$ ergibt:

$$-8 = 1 + (-4) + c$$

$$\Leftrightarrow -8 = 1 - 4 + c$$

$$\Leftrightarrow -8 = -3 + c \quad | +3$$

$$\Leftrightarrow -5 = c \text{ bzw. } c = -5$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Parabel p lautet $p: y = x^2 - 4x - 5$.

Der Flächeninhalt des Vierecks:

Zuerst muss man die Schnittpunkte C und D der Parabel p mit der x -Achse berechnen.

Einsetzen von $y = 0$ in $y = x^2 - 4x - 5$ ergibt: $0 = x^2 - 4x - 5$ bzw. $x^2 - 4x - 5 = 0$

Mit der b,c -Formel $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ erhält man:

$$x_1 = -(-2) + \sqrt{(-2)^2 - (-5)} = 2 + \sqrt{4+5} = 2 + \sqrt{9} = 5 \text{ und } x_2 = 2 - \sqrt{9} = -1$$

Die Schnittpunkte von p mit der x -Achse sind also: $C(5|0)$ und $D(-1|0)$

Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W1



Um den Flächeninhalt des Vierecks ABCD berechnen zu können, sollte man eine Skizze des Vierecks erstellen (siehe Figur 1). Darin erkennt man, dass das Viereck ein Trapez ist.

Für dessen Flächeninhalt A_{ABCD} gilt (siehe Formelsammlung):

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2} (a + c) \cdot h_T$$

Die Seite a ist der Abstand der Punkte $A(1|-8)$ und $B(3|-8)$; also $a = 2$.

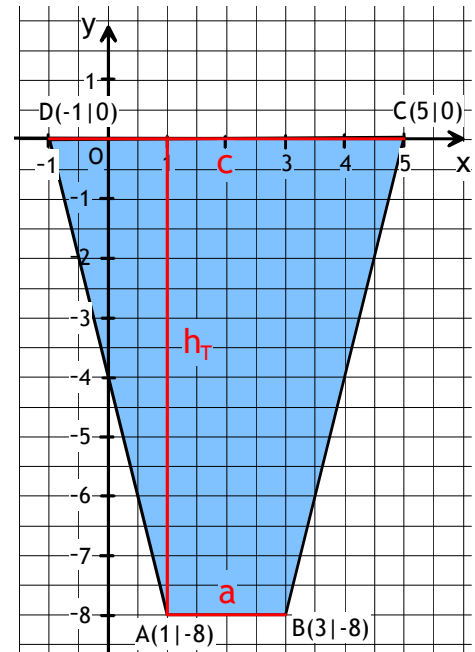
Die Seite c ist der Abstand der Punkte $C(5|0)$ und $D(-1|0)$; also $c = 6$.

Die Trapezhöhe h_T ist der Abstand des Punktes $A(1|-8)$ bzw. $B(3|-8)$ von der x -Achse; also $h_T = 8$ (siehe Figur 1).

Einsetzen in $A_{ABCD} = \frac{1}{2} (a + c) \cdot h_T$ ergibt:

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (2 + 6) \cdot 8 = 32 \text{ FE}$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Vierecks ist $A_{ABCD} = 32 \text{ FE}$.



Figur 1

Die Koordinaten des Schnittpunkts Q der Geraden g und h:

Um den Schnittpunkt Q berechnen zu können, muss man zuerst die Gleichungen der Geraden g und h aufstellen.

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1|-8)$ und $C(5|0)$.

Die Gerade h verläuft durch die Punkte $B(3|-8)$ und $D(-1|0)$ (siehe Figur 2). (Hinweis: Man kann die Geraden g und h auch vertauschen, da aus der Aufgabenstellung nicht hervorgeht, welche Gerade auf welcher Diagonalen des Vierecks ABCD verlaufen soll.)

→ Berechnung der Gleichung der Geraden g:

Einsetzen der Koordinaten von $A(1|-8)$ und $C(5|0)$ in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + c$ ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$\text{Mit } A(1|-8): -8 = m \cdot 1 + c \Leftrightarrow -8 = 1m + c \quad (I)$$

$$\text{Mit } C(5|0): 0 = m \cdot 5 + c \Leftrightarrow 0 = 5m + c \quad (II)$$

$$(I) - (II) \text{ ergibt: } -8 = -4m \quad | :(-4)$$

$$\Leftrightarrow 2 = m \text{ bzw. } m = 2$$

Einsetzen von $m = 2$ in Gleichung (I) $-8 = m + c$ ergibt: $-8 = 2 + c \quad | -2$

$$\Leftrightarrow -10 = c \text{ bzw. } c = -10$$

Damit ist g: $y = 2x - 10$.

→ Berechnung der Gleichung der Geraden h:

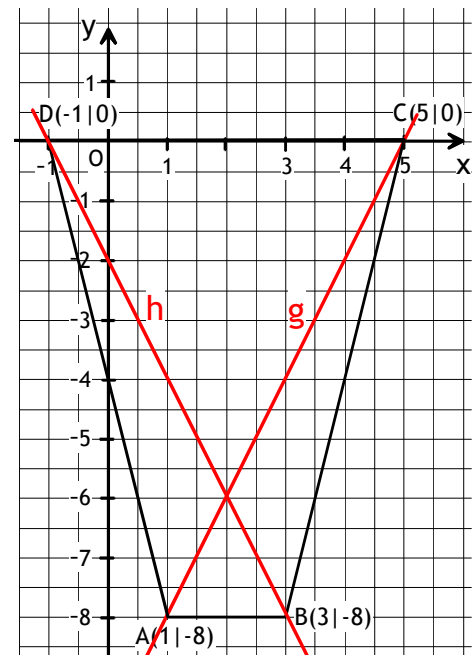
Einsetzen der Koordinaten von $B(3|-8)$ und $D(-1|0)$ in $y = mx + c$ ergibt:

$$\text{Mit } B(3|-8): -8 = m \cdot 3 + c \Leftrightarrow -8 = 3m + c \quad (I)$$

$$\text{Mit } D(-1|0): 0 = m \cdot (-1) + c \Leftrightarrow 0 = -1m + c \quad (II)$$

$$(I) - (II) \text{ ergibt: } -8 = 4m \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow -2 = m \text{ bzw. } m = -2$$



Figur 2



Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W2

Einsetzen von $m = -2$ in Gleichung (I) $-8 = 3m + c$ ergibt:

$$-8 = -6 + c \quad | +6$$

$$\Leftrightarrow -2 = c \text{ bzw. } c = -2$$

Damit ist $h: y = -2x - 2$.

Gleichsetzen der Funktionsgleichungen $g: y = 2x - 10$ und $h: y = -2x - 2$ ergibt schließlich:

$$2x - 10 = -2x - 2 \quad | +2x + 10$$

$$\Leftrightarrow 4x = 8 \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Das ist die x-Koordinate des gesuchten Schnittpunkts Q. Die y-Koordinate von $Q(2|y_Q)$ erhält man, indem man $x = 2$ in eine der beiden Funktionsgleichungen von g und h einsetzt.

Einsetzen von $x = 2$ in $g: y = 2x - 10$ ergibt: $y = 4 - 10 = -6$. Damit ist $Q(2|-6)$.

Ergebnis: Der Schnittpunkt Q zwischen den Geraden g und h ist $Q(2|-6)$.

Aufgabe W2a:

Lösungsübersicht:

- Um die **Funktionsgleichung der Parabel p_1** zu berechnen, muss man den Wert von b in $y = x^2 + bx + 7$ bestimmen. Dazu muss man die Koordinaten des Parabelpunkts $A(-4|-1)$ in $y = x^2 + bx + 7$ einsetzen und die resultierende Gleichung nach b auflösen. Die **Funktionsgleichung der Geraden g** kann mit den Koordinaten der Punkte $A(-4|-1)$ und S_1 bestimmt werden. Die Koordinaten des Scheitelpunkts S_1 erhält man durch eine quadratische Ergänzung der Funktionsgleichung von p_1 .
- Die **Funktionsgleichung der Parabel p_2** in der Form $y = x^2 + bx + c$ erhält man, indem man die Koordinaten ihres Scheitelpunkts S_2 in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ einsetzt und anschließend die Quadratklammer ausmultipliziert. Die Koordinaten von S_2 erhält man aus den Koordinaten von S_1 , da die Punkte S_1 und S_2 spiegelsymmetrisch zur y-Achse sein sollen.
- Um die **Funktionsgleichung der Parabel p_3** in der Form $y = ax^2 + c$ zu bestimmen, muss man zuerst die Koordinaten ihres Scheitelpunkts S_3 berechnen. Dazu muss man den Schnittpunkt der Geraden g mit der y-Achse berechnen, der laut Aufgabenstellung der Scheitelpunkt S_3 sein soll. Die y-Koordinate von S_3 ist der Wert von c in $y = ax^2 + c$. Den Wert von a erhält man, indem man anschließend die Koordinaten von S_1 oder S_2 in die Gleichung $y = ax^2 + c$ einsetzt. Denn laut Aufgabenstellung sollen die Punkte S_1 und S_2 auf der Parabel p_3 liegen.

Die Funktionsgleichung der Parabel p_1 :

Laut Aufgabenstellung hat die Parabel p_1 die Gleichung $y = x^2 + bx + 7$ und geht durch den Punkt $A(-4|-1)$. Einsetzen der Koordinaten von $A(-4|-1)$ in $y = x^2 + bx + 7$ ergibt:

$$-1 = (-4)^2 + b \cdot (-4) + 7$$

$$\Leftrightarrow -1 = 16 - 4b + 7$$

$$\Leftrightarrow -1 = 23 - 4b \quad | -23$$

$$\Leftrightarrow -24 = -4b \quad | :(-4)$$

$$\Leftrightarrow 6 = b \text{ bzw. } b = 6$$

Ergebnis: Die Parabel p_1 hat die Funktionsgleichung $y = x^2 + 6x + 7$.

Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W2



Die Funktionsgleichung der Geraden g:

Die Gerade g soll durch die Punkte A(-4|-1) und S_1 gehen. Um die Funktionsgleichung der Geraden g zu bestimmen, muss man die Koordinaten der Punkte A(-4|-1) und S_1 jeweils in die allgemeine Form $y = mx + c$ einsetzen. Die Koordinaten des Scheitelpunkts S_1 erhält man durch eine quadratische Ergänzung der Funktionsgleichung von p_1 : $y = x^2 + 6x + 7$.

→ Berechnen der Koordinaten von S_1 :

Die Koordinaten von S_1 erhält man, indem die Gleichung von p_1 : $y = x^2 + 6x + 7$ mit einer quadratischen Ergänzung in eine Scheitelform umwandelt:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 6x + 7 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 + 6x + 3^2 + 7 - 3^2 \quad | \text{Anwenden der ersten binomischen Formel} \\ \Leftrightarrow y &= (x + 3)^2 + 7 - 9 \\ \Leftrightarrow y &= (x + 3)^2 - 2 \end{aligned}$$

Dieser Scheitelform entnimmt man: $S_1(-3|-2)$

Einsetzen der Koordinaten von A(-4|-1) und $S_1(-3|-2)$ in $y = mx + c$ ergibt:

Mit A(-4|-1): $-1 = m \cdot (-4) + c \Leftrightarrow -1 = -4m + c \quad (I)$

Mit $S_1(-3|-2)$: $-2 = m \cdot (-3) + c \Leftrightarrow -2 = -3m + c \quad (II)$

$$\begin{aligned} (I) - (II) \text{ ergibt: } 1 &= -1m \quad | :(-1) \\ \Leftrightarrow -1 &= m \text{ bzw. } m = -1 \end{aligned}$$

Einsetzen von $m = -1$ in (I) $-1 = -4m + c$ ergibt:

$$\begin{aligned} -1 &= -4 \cdot (-1) + c \\ \Leftrightarrow -1 &= 4 + c \quad | -4 \\ \Leftrightarrow -5 &= c \text{ bzw. } c = -5 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Funktionsgleichung der Geraden g ist $y = -1x - 5$ bzw. $y = -x - 5$.

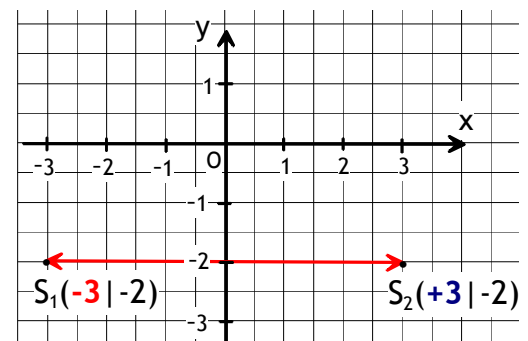
Die Funktionsgleichung der Parabel p_2 :

Die Funktionsgleichung der Parabel p_2 in der Form $y = x^2 + bx + c$ erhält man, indem man die Koordinaten ihres Scheitelpunkts S_2 in die Scheitelform $y = (x - d)^2 + e$ einsetzt.

Die Koordinaten von S_2 erhält man aus den Koordinaten von $S_1(-3|-2)$, da die Punkte S_1 und S_2 laut Aufgabenstellung spiegelsymmetrisch zur y-Achse sein sollen (siehe Figur 1). Somit ist $S_2(3|-2)$.

Einsetzen von $d = 3$ und $e = -2$ in $y = (x - d)^2 + e$ ergibt:

$$\begin{aligned} y &= (x - 3)^2 + (-2) \\ \Leftrightarrow y &= x^2 - 6x + 9 - 2 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 - 6x + 7 \end{aligned}$$



Figur 1

Ergebnis: Die Parabel p_2 hat die Funktionsgleichung $y = x^2 - 6x + 7$.

Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W2



Die Funktionsgleichung der Parabel p_3 :

Die y-Koordinate des Scheitelpunkts S_3 ist der Wert von c in $y = ax^2 + c$. Den Wert von a kann man dann berechnen, indem man die Koordinaten von $S_1(-3|-2)$ oder $S_2(3|-2)$ in $y = ax^2 + c$ einsetzt. Denn sowohl S_1 als auch S_2 sollen laut Aufgabenstellung auf der Parabel p_3 liegen.

→ Berechnen der Koordinaten von S_3 :

Der Scheitelpunkt S_3 ist laut Aufgabenstellung der Schnittpunkt der Geraden $g: y = -x - 5$ mit der y-Achse. Einsetzen von $x = 0$ in $y = -x - 5$ ergibt: $y = -5$
Der Scheitelpunkt S_3 hat also die Koordinaten $S_3(0|-5)$.

Damit ist in $y = ax^2 + c$ der c-Wert: $c = -5$

Die unvollständige Gleichung der Parabel p_3 lautet also: $y = ax^2 - 5$

Einsetzen der Koordinaten von $S_1(-3|-2)$ in $y = ax^2 - 5$ ergibt:

$$-2 = a \cdot (-3)^2 - 5$$

$$\Leftrightarrow -2 = a \cdot 9 - 5 \quad | +5$$

$$\Leftrightarrow 3 = 9a \quad | :9$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{9} = a \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Ergebnis: Die Parabel p_3 hat die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{3}x^2 - 5$.

Aufgabe W2b:

Lösungsübersicht:

- Für den **Flächeninhalt des Dreiecks EFS** gilt: $A_{EFS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot h_1$ (siehe Figur 1)

Für die Strecke $\overline{EF}$ gilt laut Aufgabenstellung $\overline{EF} = 12,6$ cm. Die Höhe h_1 des Dreiecks EFS kann mit der Tangensfunktion im Dreieck EMS berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{EM}$ kennt (siehe Figur 1). Die Strecke $\overline{EM}$ kann man im gleichschenkligen Dreieck EBF bestimmen (siehe Figur 2): $\overline{EM} = 0,5\overline{EF}$.

- Für das **Volumen der quadratischen Pyramide** gilt: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}^2 \cdot h$ (siehe Figur 3)

Die Strecke $\overline{AB}$ ist angegeben: $\overline{AB} = 12,6$ cm. Die Pyramidenhöhe h kann mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck GMS berechnet werden (siehe Figur 3), wenn man die Strecke $\overline{GM}$ kennt.

Für die Strecke $\overline{GM}$ gilt (siehe Figur 4): $\overline{GM} = 0,5d - \overline{BM}$, mit der Diagonalen d des Quadrats ABCD. Die Diagonale d ist $d = \sqrt{2} \cdot \overline{AB}$ (siehe Formelsammlung). Für die Strecke $\overline{BM}$ gilt im gleichschenkligen Dreieck EBM (siehe Figur 4): $\overline{BM} = \overline{EM}$

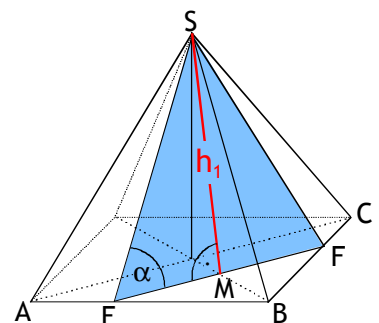
Der Flächeninhalt des Dreiecks EFS:

Für den Flächeninhalt des Dreiecks EFS gilt (siehe Figur 1):

$$A_{EFS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot h_1; \quad \text{mit } \overline{EF} = 12,6 \text{ cm}$$

Die Höhe $h_1 = \overline{MS}$ kann im Dreieck EMS mit der Tangensfunktion berechnet werden. Darin gilt (siehe Figur 1):

$$\tan \alpha = \frac{h_1}{\overline{EM}}; \quad \text{mit } \alpha = 72,0^\circ$$



Figur 1

Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W2

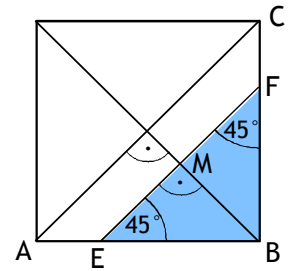


Die Strecke $\overline{EM}$ kann man mit folgender Überlegung bestimmen (siehe Figur 2):

Aufgrund der gleichen Winkel bei E und F (jeweils 45°) ist das Dreieck EBF gleichschenkelig mit der Grundseite $\overline{EF} = 12,6$ cm.

Die Strecke $\overline{BM}$ ist die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks EBF bezüglich der Grundseite $\overline{EF}$ (siehe Figur 2). Der Punkt M halbiert daher die Strecke $\overline{EF}$.

Mit $\overline{EF} = 12,6$ cm folgt somit: $\overline{EM} = 0,5 \cdot 12,6$ cm = 6,3 cm



Figur 2

Einsetzen von $\overline{EM} = 6,3$ cm in $\tan 72^\circ = \frac{h_1}{\overline{EM}}$ ergibt: $\tan 72^\circ = \frac{h_1}{6,3} \quad | \cdot 6,3$

$$\Leftrightarrow 19,39 = h_1 \text{ bzw. } h_1 = 19,39 \text{ cm}$$

Mit $\overline{EF} = 12,6$ cm und $h_1 = 19,39$ cm erhält man für $A_{EFS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot h_1$: $A_{EFS} = 122,16 \text{ cm}^2$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Dreiecks EFS ist $A_{EFS} = 122,16 \text{ cm}^2$.

Das Volumen der quadratischen Pyramide:

Für das Volumen der quadratischen Pyramide gilt (siehe Figur 3):

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}^2 \cdot h; \text{ mit } \overline{AB} = 12,6 \text{ cm und der Pyramidenhöhe } h$$

Die Pyramidenhöhe h kann im rechtwinkligen Dreieck GMS mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden, wenn man die Strecke $\overline{GM}$ kennt.

Darin gilt (siehe Figur 3): $\overline{GM}^2 + h^2 = h_1^2$

Mit $h_1 = 19,39$ cm folgt: $\overline{GM}^2 + h^2 = 375,97$

Für die Strecke $\overline{GM}$ gilt (siehe Figur 4): $\overline{GM} = \overline{BG} - \overline{BM}$

→ Die Strecke $\overline{BG}$ ist die halbe Diagonale d des Quadrats ABCD. Es gilt:

$\overline{BG} = 0,5d$. Mit $d = \sqrt{2} \cdot 12,6$ cm = 17,82 cm (siehe Formelsammlung)

folgt: $\overline{BG} = 8,91$ cm

→ Die Strecke $\overline{BM}$ ist ein Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks EBM

mit $\overline{BM} = \overline{EM}$ (siehe Figur 4).

Mit $\overline{EM} = 6,3$ cm (siehe oben) folgt: $\overline{BM} = 6,3$ cm

Einsetzen von $\overline{BG} = 8,91$ cm und $\overline{BM} = 6,3$ cm in $\overline{GM} = \overline{BG} - \overline{BM}$

ergibt: $\overline{GM} = 2,61$ cm

Einsetzen von $\overline{GM} = 2,61$ cm in $\overline{GM}^2 + h^2 = 375,97$ ergibt:

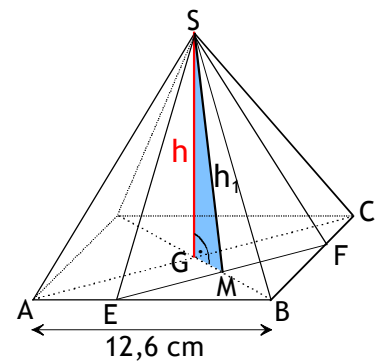
$$6,81 + h^2 = 375,97 \quad | -6,81$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 369,16 \quad | \sqrt{}$$

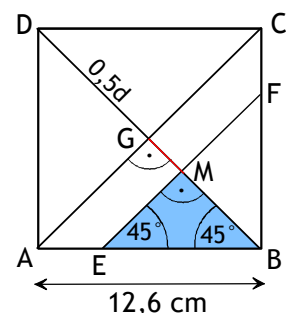
$$\Rightarrow h = 19,21 \text{ cm}$$

Einsetzen von $\overline{AB} = 12,6$ cm und $h = 19,21$ cm in $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}^2 \cdot h$ ergibt schließlich: $V_{\text{Pyr}} = 1016,59 \text{ cm}^3$

Ergebnis: Das Volumen der quadratischen Pyramide ist $V_{\text{Pyr}} = 1016,59 \text{ cm}^3$.



Figur 3



Figur 4



Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W3

Aufgabe W3a:

Lösungsübersicht:

- Zur Berechnung des **Erwartungswerts** benötigt man die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „*zweimal Laufen*“, „*Laufen und Fußball*“, „*Radfahren und Fußball*“. Deren Wahrscheinlichkeiten können mit der Produktregel berechnet werden. Man beachte, dass das gleichzeitige Aufdecken zweier Karten einem Ziehen von zwei Karten *ohne* Zurücklegen der ersten Karte entspricht. Den Erwartungswert erhält man dann mit der entsprechenden Formel (siehe Formelsammlung).
- Den **neuen Gewinn für das Ereignis „Laufen und Fußball“** kann man berechnen, indem man in der Formel für den Erwartungswert statt 6,00 € die Variable x einführt und den Erwartungswert = 0,50 € setzt. **Man beachte:** Wenn man im ersten Aufgabenteil den Erwartungswert aus Sicht eines Spielers bestimmt hat, muss man in der Formel den Erwartungswert = -0,50 € setzen.

Berechnung des Erwartungswerts (aus Sicht eines Spielers):

Für den Erwartungswert E aus Sicht eines Spielers gilt (siehe Formelsammlung):

$$E = P(\text{zweimal Laufen}) \cdot 9,00 \text{ €} + P(\text{Laufen und Fußball}) \cdot 6,00 \text{ €} + P(\text{Radfahren und Fußball}) \cdot 3,00 \text{ €} - 1,00 \text{ €}$$

Der Stapel besteht aus 10 Karten und enthält 4 Karten „*Handball*“, 3 Karten „*Radfahren*“, 2 Karten „*Laufen*“ und 1 Karte „*Fußball*“.

Man beachte bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, dass das gleichzeitige Aufdecken zweier Karten einem Ziehen von zwei Karten *ohne* Zurücklegen der ersten Karte entspricht. Das heißt, dass nach dem ersten Zug nur noch 9 Karten auf dem Tisch liegen und die zuerst gezogene Karte fehlt.

- Mit der Produktregel erhält man also: $P(\text{zweimal Laufen}) = P_1(L) \cdot P_2(L) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$
- Das Ereignis „*Laufen und Fußball*“ setzt sich aus den Ergebnissen (L; F) und (F; L) zusammen. „(L; F)“ bedeutet, dass die erste Karte „*Laufen*“ anzeigt und die zweite Karte „*Fußball*“. Bei „(F; L)“ ist es gerade umgekehrt: erste Karte „*Fußball*“ und zweite Karte „*Laufen*“.

Es gilt also (Summenregel): $P(\text{Laufen und Fußball}) = P(L; F) + P(F; L)$

$$\text{Mit der Produktregel erhält man: } P(\text{Laufen und Fußball}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{90}$$

- Das Ereignis „*Radfahren und Fußball*“ setzt sich aus den Ergebnissen (R; F) und (F; R) zusammen.

Es gilt also (Summenregel): $P(\text{Radfahren und Fußball}) = P(R; F) + P(F; R)$

$$\text{Mit der Produktregel erhält man: } P(\text{Radfahren und Fußball}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{6}{90}$$

Einsetzen von $P(\text{zweimal Laufen}) = \frac{2}{90}$, $P(\text{Laufen und Fußball}) = \frac{4}{90}$ und $P(\text{Radfahren und Fußball}) = \frac{6}{90}$ in die Formel des Erwartungswerts (siehe oben) ergibt:

$$E = \frac{2}{90} \cdot 9,00 \text{ €} + \frac{4}{90} \cdot 6,00 \text{ €} + \frac{6}{90} \cdot 3,00 \text{ €} - 1,00 \text{ €} = -\frac{1}{3} \text{ €} \approx \underline{\underline{-0,33 \text{ €}}}$$

Ergebnis:

Der Erwartungswert aus Sicht eines Spielers ist $E = \underline{\underline{-0,33 \text{ €}}}$. Ein Spieler muss also mit Verlust rechnen.



Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W3

Der neue Gewinn für das Ereignis „Laufen und Fußball“:

Man muss den neuen Gewinn für das Ereignis „Laufen und Fußball“ so wählen, dass der Erwartungswert (aus Sicht eines Spielers) $E_{\text{neu}} = -0,50 \text{ €}$ wird, wenn der Veranstalter pro Spiel durchschnittlich 0,50 € Gewinn erzielen will.

Wenn man diesen neuen Gewinn mit der Variable x bezeichnet, lautet der neue Erwartungswert (aus Sicht eines Spielers):

$$E_{\text{neu}} = \frac{2}{90} \cdot 9,00 \text{ €} + \frac{4}{90} \cdot x + \frac{6}{90} \cdot 3,00 \text{ €} - 1,00 \text{ €}$$

Mit $E_{\text{neu}} = -0,50 \text{ €}$ folgt:

$$-0,50 = \frac{2}{90} \cdot 9,00 + \frac{4}{90} \cdot x + \frac{6}{90} \cdot 3,00 - 1,00$$

$$\Leftrightarrow -0,50 = \frac{2}{10} + \frac{4}{90} \cdot x + \frac{1}{5} - 1$$

$$\Leftrightarrow -0,50 = \frac{4}{90} \cdot x - 0,6 \quad | +0,6$$

$$\Leftrightarrow 0,10 = \frac{4}{90} \cdot x \quad | \cdot 90$$

$$\Leftrightarrow 9 = 4 \cdot x \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow 2,25 = x \text{ bzw. } x = 2,25 \text{ €}$$

Ergebnis: Wenn der Veranstalter pro Spiel durchschnittlich 0,50 € Gewinn erzielen will, darf der Gewinn für das Ereignis „Laufen und Fußball“ nur 2,25 € betragen (anstatt wie ursprünglich 6,00 €).

Aufgabe W3b:

Lösungsübersicht:

- Um eine **Funktionsgleichung der Flugkurve** zu bestimmen, muss man in die Skizze ein Koordinatensystem so einzeichnen, dass der Scheitelpunkt der Parabel auf der y-Achse liegt und der Boden der x-Achse entspricht (siehe Figur 1). Dann kann die Flugkurve des Speers mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ beschrieben werden. Die maximale Höhe (= 9,80 m) des Speers ist dann die y-Koordinate des Scheitelpunkts S bzw. der Wert von c. Indem man dann die Koordinaten des Abwurfpunkts A in $y = ax^2 + 9,8$ einsetzt, kann man auch den Wert von a berechnen. Die Koordinaten von A können anhand der angegebenen Längen bestimmt werden.
- Für die **Flugweite des Speers** benötigt man die x-Koordinate der rechten Nullstelle x_B der Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$. Die Flugweite ist dann der Abstand der Punkte A und B (siehe Figur 2).
- Die **Höhe des Abwurfpunkts A*** beim zweiten Wurf erhält man, indem man dessen x-Koordinate x_{A^*} in die Gleichung $y = -\frac{1}{30}x^2 + 13$ einsetzt. Die x-Koordinate von A* kann man aus der rechten Nullstelle der Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{30}x^2 + 13$ und der angegebenen Wurfweite 38,15 m bestimmen (s. Figur 3).

Man beachte, dass das Koordinatensystem für den zweiten Wurf *nicht* mit dem Koordinatensystem des ersten Wurfs übereinstimmt! Der Abwurfpunkt beim zweiten Wurf ist also keineswegs so wie beim ersten Wurf 20 m vom horizontalen Ort des Scheitelpunkts entfernt.

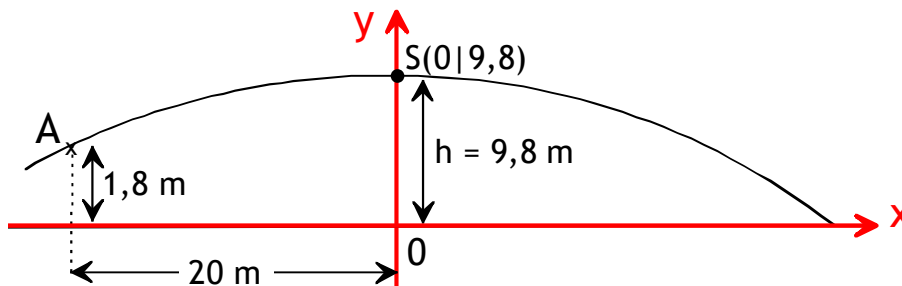


Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W3

Eine mögliche Funktionsgleichung für die Flugkurve des Speers:

Zunächst sollte man in die Skizze ein Koordinatensystem so einzeichnen, dass der Scheitelpunkt der Flugkurve auf der y-Achse liegt und der Boden der x-Achse entspricht (siehe Figur 1). Dann kann die Flugkurve des Speers mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ beschrieben werden. Die maximale Höhe (= 9,80 m) des Speers ist dann die y-Koordinate des Scheitelpunkts $S(0|9,8)$. Daraus folgt: $c = 9,8$.

Die unvollständige Funktionsgleichung der Flugkurve lautet also: $y = ax^2 + 9,8$



Figur 1

Der Punkt A hat in diesem Koordinatensystem die Koordinaten $A(-20|1,8)$. Indem man die Koordinaten von $A(-20|1,8)$ in $y = a \cdot x^2 + 9,8$ einsetzt, erhält man:

$$1,8 = a \cdot (-20)^2 + 9,8$$

$$\Leftrightarrow 1,8 = 400a + 9,8 \quad | -9,8$$

$$\Leftrightarrow -8 = 400a \quad | : 400$$

$$\Leftrightarrow -0,02 = a \text{ bzw. } a = -0,02$$

Damit lautet die Funktionsgleichung der Flugkurve: $y = -0,02x^2 + 9,8$

Ergebnis:

Die Flugkurve des Speers kann mit der Funktionsgleichung $y = -0,02x^2 + 9,8$ beschrieben werden.

Die Flugweite des Speers:

Für die Flugweite w des Speers gilt (siehe Figur 2):

$$w = 20 + x_B$$

Darin ist x_B die rechte Nullstelle von $y = -0,02x^2 + 9,8$.

Einsetzen von $y = 0$ in $y = -0,02x^2 + 9,8$ ergibt:

$$0 = -0,02x^2 + 9,8 \quad | + 0,02x^2$$

$$\Leftrightarrow 0,02x^2 = 9,8 \quad | : 0,02$$

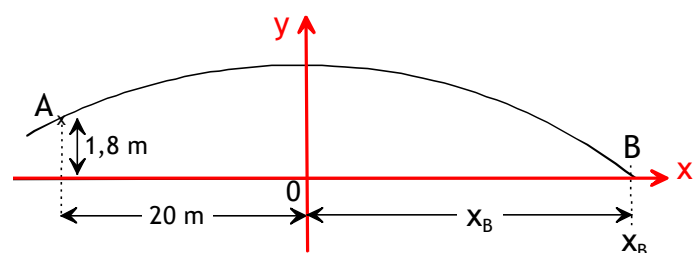
$$\Leftrightarrow x^2 = 490 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow x_1 = 22,14 \text{ und } x_2 = -22,14$$

Der positive Wert $x_1 = 22,14$ ist der gesuchte Wert $x_B = 22,14$ m.

Damit ist $w = 20 \text{ m} + 22,14 \text{ m} = 42,14 \text{ m}$.

Ergebnis: Die Flugweite des Speers beträgt $w = 42,14 \text{ m}$.



Figur 2



Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W3

Die Höhe des Abwurfpunkts beim zweiten Wurf:

Die Höhe des Abwurfpunkts A^* beim zweiten Wurf erhält man, indem man dessen x -Koordinate x_{A^*} in die Gleichung $y = -\frac{1}{30}x^2 + 13$ einsetzt. Diese x -Koordinate kann man mit der rechten Nullstelle der Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{30}x^2 + 13$ und der angegebenen Wurfweite 38,15 m bestimmen (siehe Figur 3). Es gilt:

$$|x_{A^*}| = 38,15 - x_C$$

(Hinweis: Man muss Betragsstriche um x_{A^*} setzen, weil die x -Koordinate von A^* im negativen Bereich liegt.)

In der Gleichung $|x_{A^*}| = 38,15 - x_C$ ist x_C die rechte Nullstelle von $y = -\frac{1}{30}x^2 + 13$.

Einsetzen von $y = 0$ in $y = -\frac{1}{30}x^2 + 13$ ergibt:

$$0 = -\frac{1}{30}x^2 + 13 \quad | +\frac{1}{30}x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{30}x^2 = 13 \quad | \cdot 30$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 390 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow x_1 = 19,75 \text{ und } x_2 = -19,75$$

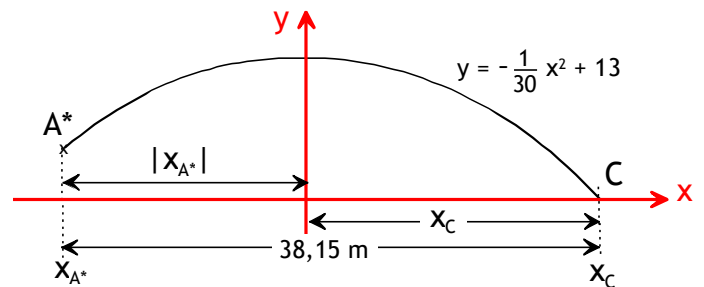
Der Wert $x_1 = 19,75$ ist der gesuchte Wert $x_C = 19,75$, weil der Punkt C im positiven Bereich liegt.

Einsetzen von $x_C = 19,75$ in $|x_{A^*}| = 38,15 - x_C$ ergibt: $|x_{A^*}| = 18,40$

Weil der Punkt A^* im negativen Bereich liegt, ist $x_{A^*} = -18,40$.

Die gesuchte Höhe $h = y_{A^*}$ des Abwurfpunktes $A^*(-18,40 | y_{A^*})$ erhält man nun, indem man $x_{A^*} = -18,40$ in die Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{30}x^2 + 13$ einsetzt:

$$y_{A^*} = -\frac{1}{30} \cdot (-18,4)^2 + 13 = 1,71 \text{ bzw. } h = 1,71 \text{ m}$$



Figur 3

Ergebnis: Die Höhe des Abwurfpunktes beim zweiten Wurf beträgt 1,71 m.



Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W4

Aufgabe W4a:

Lösungsübersicht:

Um die **Koordinaten von P und Q** berechnen zu können, muss man die Funktionsgleichung der Geraden h bestimmen. Dazu benötigt man die Steigung der Geraden g und die Koordinaten des Punktes C, durch den die Gerade h laufen soll.

- Die Steigung der Geraden g erhält man, indem man ihre Funktionsgleichung mit Hilfe der beiden Punkte A(2|3) und B(6|11) aufstellt.
- Die fehlende y-Koordinate des Punktes C(4|y_c) berechnet man, indem man x = 4 in die Funktionsgleichung der Parabel p einsetzt. Die Funktionsgleichung von p kann ebenfalls mit Hilfe der Punkte A(2|3) und B(6|11) aufgestellt werden, da auch die Parabel p durch diese Punkte gehen soll.

Berechnung der Koordinaten der Punkte P und Q:

Da die Punkte P und Q die Schnittpunkte der Geraden h mit den Koordinatenachsen sein sollen, muss man zunächst die Funktionsgleichung der Geraden h bestimmen. Dazu benötigt man die Funktionsgleichung der Geraden g und die fehlende y-Koordinate von C(4|y_c), weil die Gerade h senkrecht zur Geraden g verlaufen soll und durch den Punkt C(4|y_c) gehen soll.

→ Aufstellen der Funktionsgleichung der Geraden g:

Die Gerade g soll laut Aufgabenstellung durch die Punkte A(2|3) und B(6|11) gehen. Einsetzen der Koordinaten von A(2|3) und B(6|11) in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + c$ ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$\text{Mit A(2|3): } 3 = m \cdot 2 + c \Leftrightarrow 3 = 2m + c \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit B(6|11): } 11 = m \cdot 6 + c \Leftrightarrow 11 = 6m + c \quad (\text{II})$$

$$(I) - (II) \text{ ergibt: } -8 = -4m \quad | :(-4)$$

$$\Leftrightarrow 2 = m \text{ bzw. } m = 2$$

Einsetzen von $m = 2$ in Gleichung (I) $3 = 2m + c$ ergibt:

$$3 = 2 \cdot 2 + c$$

$$\Leftrightarrow 3 = 4 + c \quad | -4$$

$$\Leftrightarrow -1 = c \text{ bzw. } c = -1$$

Die Gerade g hat also die Funktionsgleichung $y = 2x - 1$ und die Steigung $m_g = 2$.

→ Die fehlende y-Koordinate des Punktes C(4|y_c):

Da der Punkt C(4|y_c) auf der Parabel p liegen soll, erhält man seine y-Koordinate y_c, indem man x = 4 in die Parabelgleichung einsetzt. Die Gleichung der Parabel p erhält man mit Hilfe der Punkte A(2|3) und B(6|11), die auf der Parabel p liegen sollen.

Einsetzen der Koordinaten von A(2|3) und B(6|11) in die allgemeine Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$\text{Mit A(2|3): } 3 = 2^2 + b \cdot 2 + c \Leftrightarrow 3 = 4 + 2b + c \quad (\text{I})$$

$$\text{Mit B(6|11): } 11 = 6^2 + b \cdot 6 + c \Leftrightarrow 11 = 36 + 6b + c \quad (\text{II})$$

$$(I) - (II) \text{ ergibt: } -8 = -32 - 4b \quad | +4b + 8$$

$$\Leftrightarrow 4b = -24 \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow b = -6$$



Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W4

Einsetzen von $b = -6$ in die Gleichung (I) $3 = 4 + 2b + c$ ergibt:

$$\begin{aligned} 3 &= 4 + 2 \cdot (-6) + c \\ \Leftrightarrow 3 &= 4 - 12 + c \\ \Leftrightarrow 3 &= -8 + c \quad | +8 \\ \Leftrightarrow 11 &= c \text{ bzw. } c = 11 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung der Parabel p lautet also: $y = x^2 - 6x + 11$.

Einsetzen von $x = 4$ (= x-Koordinate von $C(4|y_c)$) in $y = x^2 - 6x + 11$ ergibt:

$$y_c = 4^2 - 6 \cdot 4 + 11 = 16 - 24 + 11 = 3$$

Der Punkt C hat also die Koordinaten $C(4|3)$.

→ Aufstellen der Funktionsgleichung der Geraden h:

Da die Gerade h laut Aufgabenstellung senkrecht zur Geraden g: $y = 2x - 1$ stehen soll, muss für die Steigung m_h der Geraden h gelten (siehe Formelsammlung): $m_h \cdot m_g = -1$

Mit $m_g = 2$ erhält man: $m_h \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow m_h = -\frac{1}{2}$

Damit lautet die unvollständige Gleichung der Geraden h: $y = -\frac{1}{2}x + c^*$.

Da der Punkt $C(4|3)$ auf der Geraden h liegen soll, kann man c^* durch Einsetzen der Koordinaten von $C(4|3)$ in $y = -\frac{1}{2}x + c^*$ berechnen:

$$\begin{aligned} 3 &= -\frac{1}{2} \cdot 4 + c^* \\ \Leftrightarrow 3 &= -2 + c^* \quad | +2 \\ \Leftrightarrow 5 &= c^* \text{ bzw. } c^* = 5 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung der Geraden h lautet also: $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

- Den Schnittpunkt von h mit der y-Achse erhält man nun, indem man in $y = -\frac{1}{2}x + 5$ für $x = 0$ setzt:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 5 = 5 \Rightarrow P(0|5)$$

- Den Schnittpunkt von h mit der x-Achse erhält man, indem man in $y = -\frac{1}{2}x + 5$ für $y = 0$ setzt:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}x + 5 \quad | +\frac{1}{2}x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}x &= 5 \quad | : \frac{1}{2} \text{ bzw. } | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow x &= 10 \end{aligned}$$

Damit ist $Q(10|0)$.

Ergebnis: Die Koordinaten von P und Q sind: $P(0|5)$ und $Q(10|0)$.

(Hinweis: Die Bezeichnung der Punkte P und Q kann auch vertauscht werden.)



Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W4

Aufgabe W4b:

Lösungsübersicht:

- Für den **Flächeninhalt des Dreiecks EM_1D** gilt: $A_{EM_1D} = \frac{1}{2} \overline{DM_1} \cdot \overline{DE}$. Die Strecke $\overline{DM_1}$ ist die halbe Länge des DIN A4-Blatts, also $\overline{DM_1} = 14,85$ cm. Die Strecke $\overline{DE}$ kann man dann im Dreieck EM_1D mit der Tangensfunktion berechnen, wenn man den Winkel $\alpha_1 = \angle DM_1E$ bei M_1 kennt (siehe Figur 1). Der Winkel α_1 kann mit der Winkelsumme $\alpha_1 + 90^\circ + 2\alpha_2 = 180^\circ$ berechnet werden, wenn man den Winkel α_2 kennt (siehe Figur 1). Und der Winkel α_2 wiederum kann im Dreieck M_1M_2C mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 2).
- Den **Flächeninhalt des Vierecks FBM_2C'** erhält man, indem man vom Flächeninhalt des DIN A4-Blatts die Flächeninhalte aller Dreiecke abzieht, die das DIN A4-Blatt ausfüllen. Dazu muss man noch die Flächeninhalte der Dreiecke EFM_1 und M_1M_2C berechnen, die aufgrund der Faltung jeweils zweimal vorkommen. Der Flächeninhalt des Dreiecks EM_1D wurde bereits im ersten Aufgabenteil berechnet.

Für den **Flächeninhalt des Dreiecks EFM_1** gilt (siehe Figur 1): $A_{EFM_1} = \frac{1}{2} \overline{EM_1} \cdot \overline{M_1F}$

Für die Strecke $\overline{EM_1}$ gilt wegen der Faltung (siehe Figur 1): $\overline{EM_1} = \overline{AE}$, mit $\overline{AE} = 21,0$ cm – $\overline{DE}$.

Die Strecke $\overline{DE}$ wurde bereits im ersten Aufgabenteil berechnet.

Die Strecke $\overline{M_1F}$ kann anschließend im Dreieck EFM_1 mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel ε kennt (siehe Figur 4). Für diesen Winkel ε gilt: $2\varepsilon + \varepsilon^* = 180^\circ$. Den Winkel ε^* erhält man mit der Summe der Innenwinkel im rechtwinkligen Dreieck EM_1D .

Der **Flächeninhalt des Dreiecks $C'M_2M_1$** ist aufgrund der Faltung gleich groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks CM_1M_2 . Dessen Flächeninhalt erhält man mit den Strecken $\overline{CM_1}$ und $\overline{CM_2}$ (siehe Figur 2).

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks EM_1D :

Für den Flächeninhalt des Dreiecks EM_1D gilt: $A_{EM_1D} = \frac{1}{2} \overline{DM_1} \cdot \overline{DE}$

Die Strecke $\overline{DM_1}$ ist die halbe Länge des DIN A4-Blatts: $\overline{DM_1} = 14,85$ cm

Die Strecke $\overline{DE}$ kann man im Dreieck EM_1D mit der Tangensfunktion berechnen, wenn man den Winkel $\alpha_1 = \angle DM_1E$ kennt (siehe Figur 1).

Darin gilt: $\tan \alpha_1 = \frac{\overline{DE}}{14,85}$

Den Winkel α_1 erhält man mit der Winkelsumme $\alpha_1 + 90^\circ + 2\alpha_2 = 180^\circ$ (s. Figur 2). (Man beachte, dass der Winkel α_2 sowohl im Dreieck CM_1M_2 als auch im Dreieck $C'M_2M_1$ vorkommt, weil beide Dreiecke deckungsgleich sind.)

Der Winkel α_2 kann im Dreieck M_1M_2C mit der Tangensfunktion berechnet werden (siehe Figur 2). Darin gilt:

$$\tan \alpha_2 = \frac{10,5}{14,85} \Rightarrow \alpha_2 = 35,3^\circ$$

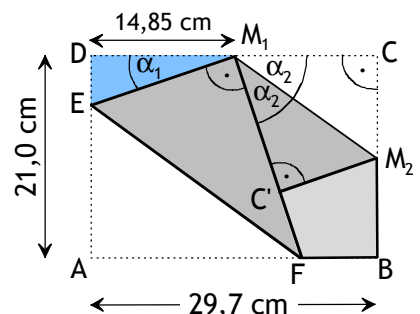
Einsetzen von $\alpha_2 = 35,3^\circ$ in $\alpha_1 + 90^\circ + 2\alpha_2 = 180^\circ$ ergibt:

$$\alpha_1 + 90^\circ + 70,6^\circ = 180^\circ$$

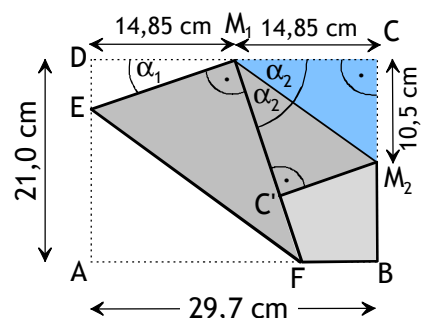
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 160,6^\circ = 180^\circ \quad | -160,6^\circ$$

$$\Leftrightarrow \underline{\alpha_1 = 19,4^\circ}$$

Einsetzen von $\alpha_1 = 19,4^\circ$ in $\tan \alpha_1 = \frac{\overline{DE}}{14,85}$ ergibt:



Figur 1



Figur 2



Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W4

$$\tan 19,4^\circ = \frac{\overline{DE}}{14,85} \quad | \cdot 14,85$$

$$\Leftrightarrow 5,23 = \overline{DE} \quad \text{bzw.} \quad \overline{DE} = \underline{5,23 \text{ cm}}$$

Einsetzen von $\overline{DM_1} = 14,85 \text{ cm}$ und $\overline{DE} = 5,23 \text{ cm}$ in $A_{EM_1D} = \frac{1}{2} \overline{DM_1} \cdot \overline{DE}$ ergibt schließlich:

$$A_{EM_1D} = \frac{1}{2} \overline{DM_1} \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot 14,85 \text{ cm} \cdot 5,23 \text{ cm} = \mathbf{38,83 \text{ cm}^2}$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Dreiecks EM_1D beträgt $A_{EM_1D} = \mathbf{38,83 \text{ cm}^2} \approx \mathbf{39 \text{ cm}^2}$.

Berechnung des Flächeninhalts des Vierecks FBM_2C :

Den Flächeninhalt des Vierecks FBM_2C erhält man, indem man vom Flächeninhalt des DIN A4-Blatts die Flächeninhalte aller Dreiecke abzieht, die das DIN A4-Blatt ausfüllen.

Es gilt: $A_{FBM_2C} = \text{DIN A4-Blatt} - 2A_{CM_1M_2} - 2A_{EFM_1} - A_{EM_1D}$

Mit DIN A4-Blatt = $29,7 \text{ cm} \cdot 21,0 \text{ cm} = 623,70 \text{ cm}^2$ und

$A_{EM_1D} = 38,83 \text{ cm}^2$ (siehe oben) erhält man:

$$A_{FBM_2C} = 623,70 \text{ cm}^2 - 2A_{CM_1M_2} - 2A_{EFM_1} - 38,83 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow A_{FBM_2C} = \mathbf{584,87 \text{ cm}^2} - 2A_{CM_1M_2} - 2A_{EFM_1}$$

Man beachte, dass aufgrund der Faltung die Dreiecke EAF und EFM_1 deckungsgleich sind (schraffierte Flächen in Figur 3). Das Gleiche gilt für die Dreiecke $C'M_2M_1$ und CM_1M_2 (karierte Flächen in Figur 3).

→ Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks CM_1M_2 :

Für den Flächeninhalt des Dreiecks CM_1M_2 gilt (siehe Figur 3):

$$A_{CM_1M_2} = \frac{1}{2} \cdot 14,85 \text{ cm} \cdot 10,50 \text{ cm} = \mathbf{77,96 \text{ cm}^2}$$

→ Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks EFM_1 :

Für den Flächeninhalt des Dreiecks EFM_1 gilt (siehe Figur 4):

$$A_{EFM_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EM_1} \cdot \overline{M_1F}$$

• Für die Strecke $\overline{EM_1}$ gilt aufgrund der Faltung: $\overline{EM_1} = \overline{AE}$

Für $\overline{AE}$ gilt (siehe Figur 4): $\overline{AE} = 21,0 \text{ cm} - \overline{DE}$

Mit $\overline{DE} = 5,23 \text{ cm}$ (s.o.) folgt: $\overline{AE} = 15,77 \text{ cm}$ bzw. $\overline{EM_1} = \underline{15,77 \text{ cm}}$

• Die Strecke $\overline{M_1F}$ kann anschließend im Dreieck EFM_1 mit der Tangensfunktion berechnet werden, wenn man den Winkel ε kennt (siehe Figur 4). Für diesen Winkel ε gilt: $2\varepsilon + \varepsilon^* = 180^\circ$.

Den Winkel ε^* erhält man mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck EM_1D (siehe Figur 4). Darin gilt:

$$\varepsilon^* + 90^\circ + 19,4^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^* + 109,4^\circ = 180^\circ \quad | -109,4^\circ$$

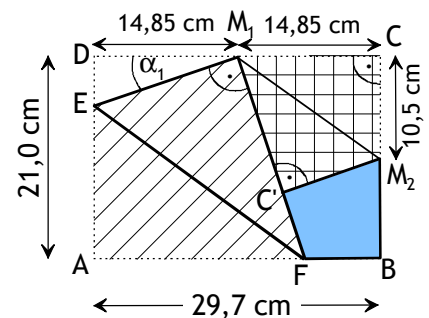
$$\Leftrightarrow \varepsilon^* = 70,6^\circ$$

Einsetzen von $\varepsilon^* = 70,6^\circ$ in $2\varepsilon + \varepsilon^* = 180^\circ$ ergibt:

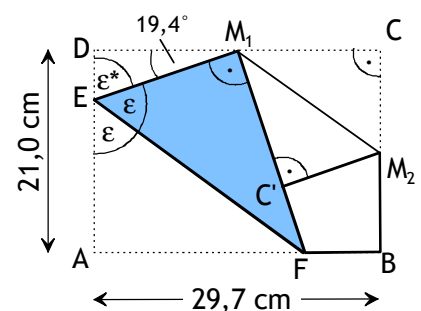
$$2\varepsilon + 70,6^\circ = 180^\circ \quad | -70,6^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2\varepsilon = 109,4^\circ \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = \mathbf{54,7^\circ}$$



Figur 3



Figur 4

Lösungen zur Prüfung 2021: Wahlbereich - Aufgabe W4



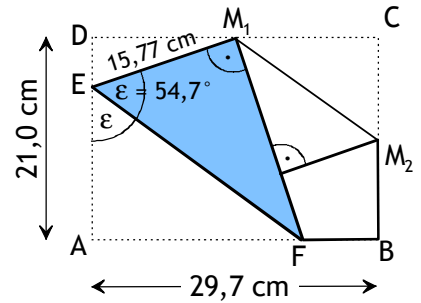
Im Dreieck EFM_1 erhält man nun mit $\overline{EM_1} = 15,77 \text{ cm}$ und der Tangensfunktion (siehe Figur 5):

$$\tan 54,7^\circ = \frac{\overline{M_1F}}{15,77} \quad | \cdot 15,77$$

$$\Leftrightarrow 22,27 = \overline{M_1F} \quad \text{bzw.} \quad \overline{M_1F} = \underline{22,27 \text{ cm}}$$

Einsetzen von $\overline{EM_1} = 15,77 \text{ cm}$ und $\overline{M_1F} = 22,27 \text{ cm}$ in

$$A_{EFM_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EM_1} \cdot \overline{M_1F} \quad \text{ergibt:} \quad A_{EFM_1} = \underline{175,60 \text{ cm}^2}$$



Figur 5

Einsetzen von $A_{CM_1M_2} = 77,96 \text{ cm}^2$ und $A_{EFM_1} = 175,60 \text{ cm}^2$ in $A_{FBM_2C'} = 584,87 \text{ cm}^2 - 2A_{CM_1M_2} - 2A_{EFM_1}$ ergibt schließlich den gesuchten Flächeninhalt des Vierecks FBM_2C' :

$$A_{FBM_2C'} = 584,87 \text{ cm}^2 - 2 \cdot 77,96 \text{ cm}^2 - 2 \cdot 175,60 \text{ cm}^2 = \underline{77,75 \text{ cm}^2 \approx 78 \text{ cm}^2}$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Vierecks FBM_2C' ist $\underline{A_{FBM_2C'} = 77,75 \text{ cm}^2 \approx 78 \text{ cm}^2}$.